ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ПЕРЕЯСЛАВ-ХМЕЛЬНИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ
ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ГРИГОРІЯ СКОВОРОДИ»

ВІТЧИЗНЯНА НАУКА НА ЗЛАМІ ЕПОХ: ПРОБЛЕМИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ РОЗВИТКУ

Матеріали XXVI Всеукраїнської науково-практичної інтернет-конференції

14 жовтня 2016 року

Переяслав-Хмельницький - 2016

УДК 534.1

Александр Шаповалов, Ольга Кутовая
(Харьков)

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ, ВЫЗВАННЫЕ ДВИЖЕНИЕМ ГРУППЫ СИЛ ПО КРУГОВОЙ ТРАЕКТОРИИ

Рассматриваются поперечные колебания балки на упругом основании с учетом вязкого сопротивления, происходящие под действием вращающейся нагрузки. Выясняются особенности этих колебаний.

Ключевые слова: *балка, поперечные колебания, упругое основание, вынужденные колебания, движущаяся нагрузка, резонанс, амплитуда.*

We are considering transverse vibrations of beam on an elastic foundation considering the viscous resistance, occurring under the influence of rotating load. We find out the characteristics of there fluctuations.

Key words: *beam, transverse vibrations, elastic foundation, forced oscillations, moving load, the resonance amplitude.*

В промышленных условиях балки на упругом основании могут использоваться в качестве опор для упорных подшипников и других устройств, совершающих вращательное движение. В связи с этим возникает задача исследования динамического поведения балки при действии вращающейся нагрузки. Для выяснения особенностей этих колебаний рассматриваются конечная и бесконечная балки на винклеровом основании с учетом внешнего вязкого сопротивления. Нагрузка представлена группой равных регулярно расположенных по окружности сил, перпендикулярных плоскости основания. Движение сил происходит по круговой траектории с постоянной угловой скоростью. Такое нагружение может в первом приближении представить воздействие на опору со стороны упорного шарикоподшипника.

1. Поперечные колебания конечной балки на упругом основании опишем следующим дифференциальным уравнением [1, с. 256]

$$EJy^{IV} + \rho\ddot{y} + \mu\dot{y} + cy = q(x,t). \qquad (1.1)$$

Здесь EJ — изгибная жесткость, ρ — масса единицы длины балки, μ — коэффициент вязкого трения, c — жесткость основания, q — внешняя нагрузка.

Поместив начало системы координат в левый конец балки длиной l, разложим ее поперечный прогиб в ряд

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(t) X_n(x), \qquad (1.2)$$

где $X_n = \sin\frac{\lambda_n}{l}x + A_n\cos\frac{\lambda_n}{l}x + B_n sh\frac{\lambda_n}{l}x + C_n ch\frac{\lambda_n}{l}x$ – собственные формы колебаний балки без упругого основания. Постоянные A_n, B_n, C_n, и параметр λ_n определяются из соответствующих граничных условий задачи.

Разложим в ряд, аналогичный (1.2), и внешнюю нагрузку

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) X_n(x), \qquad (1.3)$$

которая в соответствии с изложенным выше задается выражением

$$q = Q\sum_{s=1}^{m} \delta(x - x_s). \qquad (1.4)$$

Здесь Q — величина одной силы; $x_s = x_s(t)$ – координата точки приложения s – той силы, m – количество сил, движущихся по окружности радиуса r с центром в точке $x = a$, δ – функция Дирака.

Из выражения (1.3) и (1.4) для коэффициентов разложения имеем

$$Q_n(t)=\frac{Q}{g_n l}\Big[(D_1+A_nD_2)\sum_{s=1}^{m}\cos\alpha\xi_s+(D_2-A_nD_1)\sum_{s=1}^{m}\sin\alpha\xi_s+(B_nD_3+C_nD_4)\sum_{s=1}^{m}\cos i\alpha\xi_s+$$

$$+i^{-1}(B_nD_4+C_nD_3)\sum_{s=1}^{m}\sin i\alpha\xi_s, \quad (1.5)$$

где $g_n=\frac{1}{2}l\int_0^l X_n(x)dx$; $D_1=\sin\alpha a$, $D_2=\cos\alpha a$, $D_3=sh\alpha a$, $D_4=ch\alpha a$; $\alpha=\frac{\lambda_n}{l}$;

$\xi_s=x_s-a$; $i=\sqrt{-1}$.

В полярной системе координат положение точки x_s на окружности радиуса r определяется углом ψ_s по формуле

$$\xi_s=r\sin\psi_s, \qquad (s=1,2,3,...,m). \quad (1.6)$$

Тогда, пользуясь соотношениями [2, с. 966], имеем

$$e^{iz\sin\theta}=J_0(z)+2\sum_{j=1}^{\infty}J_{2j}(z)\cos 2j\theta+2i\sum_{j=1}^{\infty}J_{2j-1}(z)\sin(2j-1)\theta, \quad (1.7)$$

$J_\nu(iz)=i^\nu I_\nu(z)$,

где J_ν и I_ν — обычная и модифицированная функции Бесселя порядка 0,1,2,…; тогда выражение (1.5) представим в виде

$$Q_n(t)=\frac{Q}{g_n l}\Big[mL_0+\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{1j}\sum_{s=1}^{m}\cos 2j\psi_s+\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{2j}\sum_{s=1}^{m}\sin(2j-1)\psi_s\Big], \quad (1.8)$$

где $L_0=J_0(\alpha r)(D_1+A_nD_2)+I_0(\alpha r)(B_nD_3+C_nD_4)$;

$\lambda_{1j}=2J_{2j}(\alpha r)(D_1+A_nD_2)+2(-1)^jI_{2j}(\alpha r)(B_nD_3+C_nD_4)$;

$\lambda_{2j}=2J_{2j-1}(\alpha r)(D_2-A_nD_1)+2(-1)^{j-1}I_{2j}(\alpha r)(B_nD_4+C_nD_3)$.

При помощи формул [2, с. 43]

$$\sum_{s=1}^{m-1}\cos(u+s\upsilon)=\cos(u+\frac{m-1}{2}\upsilon)\sin\frac{m\upsilon}{2}\cos ec\frac{\upsilon}{2}, \quad (1.9)$$

$$\sum_{s=1}^{m-1}\sin(u+s\upsilon)=\sin(u+\frac{m-1}{2}\upsilon)\sin\frac{m\upsilon}{2}\cos ec\frac{\upsilon}{2}$$

для регулярного расположения сил

$\psi_{s+1}=\psi_1+S\frac{2\pi}{m}$, ($s=0,1,2,...,m-1$)

находим

$$\sum_{s=1}^{m}\cos 2j\psi_s=\begin{cases} m\cos\overline{m}s\psi_1, & j=\frac{1}{2}s\overline{m} \\ 0, & j\neq\frac{1}{2}s\overline{m}\end{cases} \quad (1.10)$$

$$\sum_{s=1}^{m}\sin(2j-1)\psi_s=\begin{cases} m\delta_m\sin m(2s-1)\psi_1, & j=[(2s-1)m+1]/2 \\ 0, & j\neq[(2s-1)m+1]/2\end{cases}$$

Здесь четным значением m соответствуют $\overline{m}=m$, $\delta_m=0$. Если m нечетно, то $\overline{m}=2m$, $\delta_m=1$

При постоянной скорости вращения $(\psi_1 = \omega t)$ тогда согласно (1.8) и (1.10) имеем

$$Q_n(t) = \frac{Qm}{g_n l}\left[L_0 + \sum_{s=1}^{\infty} M_s \cos \overline{m} s \omega t + \delta_m \sum_{s=1}^{\infty} N_s \sin(2s-1) m \omega t \right] \tag{1.11}$$

где

$$M_s = 2(D_1 + A_n D_2) J_{\overline{m}s}(\omega r) + 2(B_n D_3 + C_n D_4)(-1)^{\frac{\overline{m}s}{2}} I_{\overline{m}s}(\omega r)$$

$$N_s = 2(D_2 - A_n D_1) J_{m(2s-1)}(\omega r) + 2(B_n D_4 + C_n D_3)(-1)^{\frac{[m(2s-1)-1]}{2}} I_{m(2s-1)}(\omega r) \tag{1.12}$$

Поставив (1.2) и (1.3) в уравнение (1.1), приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\ddot{D}_n + \frac{\mu}{\rho}\dot{D}_n + S2_n^2 D_n = \rho^{-1} Q_n(t)$$

Здесь $\Omega_n^2 = \left(EJ\alpha^4 + C\right)/\rho$ — квадраты собственных частот колебаний балки на упругом основании.

Ограничиваясь рассмотрением установившихся вынужденных колебаний, решение n-го уравнения с учетом разложения (1.11) ищем в виде

$$D_n = R_{no} + \sum_{s=1}^{\infty} E_{ns} \cos \overline{m} s \omega t + \sum_{s=1}^{\infty} F_{ns} \sin \overline{m} s \omega t + \sum_{s=1}^{\infty} H_{ns} \sin m(2s-1)\omega t +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} T_{ns} \cos m(2s-1)\omega t .$$

Для определения коэффициентов получаем равенства

$$R_{no} = \frac{GL_0}{EJ\alpha^4 + C};$$

$$R_{no} = \frac{GL_0}{EJ\alpha^4 + C};$$

$$E_{ns} = \frac{GM_s \Delta_1}{\rho(\Delta_1^2 + \Delta_3^2)/\rho^2} = \frac{\rho\Delta_1}{\Delta_3} F_{ns}, \tag{1.13}$$

$$H_{ns} = \frac{G\delta_m N_s \Delta_2}{\rho(\Delta_2^2 + \Delta_4)/\rho^2} = \frac{\rho\Delta_2}{\Delta_4} T_{ns},$$

где $G = \dfrac{Qm}{g_n l}$; $\Delta_1 = \Omega_n^2 - (\overline{m} s \omega)^2$; $\Delta_3 = \mu\, s\overline{m}\,\omega$;

$\Delta_2 = \Omega_n^2 - [m(2s-1)\omega]^2$; $\Delta_4 = \mu\, m(2s-1)\omega$.

Таким образом, в установившемся режиме балка, получив статический прогиб, равный

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} R_{no} X(x),$$

будет совершать полигармонические колебания с частотами $\overline{m} s \omega$ и $m(2s-1)\omega$ $(s = 1,2,3...)$. Прогиб балки пропорционален произведению Q_m, следовательно, он зависит от суммарного внешнего усилия, передаваемого балке.

Проанализируем теперь амплитуды возбуждения колебаний (1.12). В силу того, что максимальные значения функций Бесселя $J_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$ убывают с ростом V, увеличение количества сил при сохранении величины нагрузки mQ уменьшает амплитуды возбуждения, и, таким образом, способствует снижению уровня вибраций.

2. Рассмотрим теперь поперечные колебания бесконечной балки на упругом основании, которые так же описываются уравнением (1.1).

Внешняя нагрузка задана выражением (1.4), только теперь центр траектории движения сил находится в точке $x = 0$.

Пользуясь комплексным преобразованием Фурье [3, с. 59]

$$\bar{y} = \int_{-\infty}^{\infty} y e^{ipx} dx,$$

находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^{IV} e^{ipx} dx = p^4 \bar{y}, \ \bar{q} = Q \sum_{s=1}^{m} e^{ipx_s}. \tag{1.14}$$

Принимая во внимание формулы (1.6) и (1.7) и полагая $\psi_s = \frac{\pi}{2} - \varphi_s$, изображение нагрузки представим в виде

$$\bar{q} = QmJ_0(pr) + Q\sum_{j=1}^{\infty} i^j J_j(pr) \sum_{s=1}^{m} \cos j\varphi_s. \tag{1.15}$$

С помощью формулы (1.9) для регулярного расположения сил находим

$$\sum_{s=1}^{m} \cos j\varphi_s = \begin{cases} m\cos ms\varphi_1, & j = ms \\ 0, & j \neq ms \end{cases}. \tag{1.16}$$

Постоянной скорости вращения $(\varphi_1 = \omega t)$ согласно (1.15) и (1.16) будет соответствовать

$$\bar{q} = Qm\left[J_0(pr) + \sum_{s=1}^{\infty} M_s \cos ms\omega t\right], \tag{1.17}$$

где $M_s = i^{ms} J_{ms}(pr)$.

Учитывая выражение (1.14) запишем уравнение (1.1) в пространстве изображений

$$\ddot{\bar{y}} + \mu \dot{\bar{y}} + \Omega^2 \bar{y} = \rho^{-1} \bar{y}, \tag{1.18}$$

где $\Omega^2 = (EJp^4 + C)/\rho$; $\mu_1 = \mu/\rho$.

Решение уравнения (1.18) с учетом разложения (1.17) ищем в виде

$$\bar{y} = \bar{T}_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{E}_s \cos ms\omega t + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{F}_s \sin ms\omega t. \tag{1.19}$$

Для определения коэффициентов находим равенства

$$\bar{T}_0 = \frac{QmJ_0(pr)}{EJp^4 + C}; \ (1.20) \tag{1.20}$$

$$\bar{E}_s = \frac{Qm}{\rho} \frac{M_s \Delta_5}{\frac{\Delta_5^2 + \Delta_6^2}{\rho^2}} = \frac{\rho \Delta_5}{\Delta_6} \bar{F}_s,$$

где $\Delta_5 = \Omega^2 - (ms\omega)^2$, $\Delta_6 = \mu sm\omega$.

Применяем к выражению (1.20) формулу обращения

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{y} e^{-ipx} dp,$$

получаем

$$T_0 = \frac{Qm}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(pr) e^{-ipx}}{EJp^4 + C} dp,$$

$$E_s = \frac{Qm}{2\pi\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_s \Delta_5 e^{-ipx}}{\Delta_5^2 + \Delta_6^2 / p^2} dp, \tag{1.21}$$

$$F_5 = \frac{Qm}{2\pi\rho^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{M_5\Delta_6 e^{-ipx}}{\Delta_5^2+\Delta_6^2/p^2}\,dp\,.$$

Анализ интегралов (1.21) в общем случае затруднителен. Поэтому рассмотрим колебания балки без затухания при движении одной силы по окружности весьма малого радиуса. В этом случае, заменяя функции Бесселя их одночленными разложениями в ряд, будем иметь

$$T_0 \approx Q\sqrt{4/C^3EJ}\,\exp(-x\sqrt[4]{C/4EJ})(\cos\sqrt[4]{C/4EJ}+\sin x\sqrt[4]{C/4EJ}),$$

$$E_1 \approx \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\sqrt{u/EJ}}\exp(-\alpha_1 x)\sin\alpha_1 x, & u\rangle\ 0\ ; \\ \dfrac{Qr}{8\sqrt{-u/EJ}}\left[\cos\alpha_2 x-\exp(-\alpha_2 x)\ \right], & u\ \langle\ 0\ . \end{cases}$$

$$E_2 \approx \begin{cases} -\dfrac{Qr^2}{32\sqrt[4]{\upsilon/(EJ)^3}}\exp(-\beta_1 x)(\cos\beta_1 x-\sin\beta_1 x), & \upsilon\ \rangle\ 0; \\ -\dfrac{Qr^2}{32\sqrt[4]{\upsilon/(EJ)^3}}\left[\sin\beta_2 x-\exp(-\beta_2 x)\ \right], & \upsilon\ \langle\ 0. \end{cases} \qquad (1.22)$$

$$E_3 \approx \begin{cases} -\dfrac{Qr^3}{96EI}\exp(-\gamma_1 x)\cos\gamma_1 x, & W\rangle\ 0 \\ -\dfrac{Qr^3}{192EI}\left[\exp(\gamma_2 x)+\cos(\gamma_2 x)\ \right], & W\langle\ 0 \end{cases}$$

Здесь $\alpha_1=\sqrt[4]{u/4EJ}$, $\alpha_2=\sqrt[4]{-u/4EJ}$, $\beta_1=\sqrt[4]{\upsilon/4EJ}$, $\beta_2=\sqrt[4]{-\upsilon/EJ}$, $\gamma_1=\sqrt[4]{W/4EJ}$, $\gamma_2=\sqrt[4]{-W/EJ}$, $u=c-\rho\omega^2$, $\nu=c-4\rho\omega^2$, $W=c-9\rho^2\omega^2$

Из выражений (1.22) следуют условия резонансов в рассматриваемой системе. Резонанс наступает при вращении одной силы с угловыми скоростями $\omega=\sqrt{\dfrac{c}{\rho}}$, $\omega=0{,}5\sqrt{\dfrac{c}{\rho}}$.

Если нагрузка состоит из нескольких сил, движущихся по окружности малого радиуса, то, проведя аналогичный анализ, можно убедиться, что при числе сил больше двух амплитуды колебаний балки остаются конечными при любых угловых скоростях остается.

ИСТОЧНИКИ И ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаков И.М., Теория колебаний / И.М. Бабаков. – М.: Наука, 1965. – 559 с.
2. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. РыжиК. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
3. Трантнер К.Дж., Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантнер. – М.: Гостехиздат, 1956. – 204 с.