

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ
ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ MATHCAD 14
ТА MS EXCEL

МІНІСТЕРСТВО ОХОРОНИ ЗДОРОВ'Я УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ФАРМАЦЕВТИЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О. В. Кутова, Р. В. Сагайдак-Нікітюк,
О. С. Кухтенко, І. В. Ковалевська

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ
ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МАТНСАД 14
ТА MS EXCEL**

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

За редакцією доцентки О. В. Кутової

Самостійне електронне навчальне видання

Харків
НФаУ
2023

УДК 615.24+616.3-085.24

К 95

Рецензенти:

О. М. Близнюк, докторка технічних наук, професорка Національного технічного університету «ХПІ»;

О. С. Шпичак, доктор фармацевтичних наук, професор, завідувач кафедри промислової фармації та економіки Інституту підвищення кваліфікації спеціалістів фармації Національного фармацевтичного університету

Рекомендовано

*ученою радою Національного фармацевтичного університету
(протокол № 7 від 31 серпня 2023 р.)*

Кутова О. В. та ін.

К 95

Математичне моделювання технологічних процесів із застосуванням Mathcad 14 та MS Excel : навчальний посібник / О. В. Кутова, Р. В. Сагайдак-Нікітюк, О. С. Кухтенко, І. В. Ковалевська ; за ред. О. В. Кутової. — Самост. електрон. навч. вид. — Харків : НФаУ, 2023. — 108 с.

ISBN 978-966-615-610-8 (PDF)

У посібнику розглянуто основні принципи і методи складання й аналізу математичних моделей гідродинамічної системи, осадження частинок, процесів тепло- і масопередачі. Завдання вирішено за допомогою пакета Mathcad 14 та електронних таблиць MS Excel.

Призначено для здобувачів вищої освіти спеціальності «Біотехнології та біоінженерія» й освітньої програми «Технології фармацевтичних препаратів».

УДК 615.24+616.3-085.24

ISBN 978-966-615-610-8 (PDF)

© Кутова О. В., Сагайдак-Нікітюк Р. В.,
Кухтенко О. С., Ковалевська І. В., 2023
© НФаУ, 2023

ВСТУП

Сучасний етап науково-технічного прогресу характеризується великим обсягом нової науково-технічної інформації і появою складніших технологічних процесів. У таких умовах необхідно за короткий період часу засвоїти нові процеси, створити апарати для їх здійснення й оптимізувати технологічні параметри виробництва. Одним з методів, за допомогою якого можна вирішити виниклі завдання, є математичне моделювання.

Метод математичного моделювання полягає у вивченні властивостей об'єкта на математичній моделі. Чим складніше об'єкт дослідження, тим складніше математичний вид залежностей, які його характеризують. Метою складання навчального посібника «Математичне моделювання технологічних процесів із застосуванням Mathcad 14 та MS Excel» є навчити здобувачів вищої освіти використовувати знання та уміння, отримані з освітніх компонент «Процеси і апарати хіміко-фармацевтичних виробництв», «Процеси і апарати біотехнологічних виробництв» і «Загальна хімічна технологія» для математичного моделювання хіміко-технологічних процесів, їх оптимізації та проектування.

У навчальному посібнику розглянуті гідромеханічні, теплові та масообмінні процеси. Аналіз процесів за допомогою математичного моделювання можливий для складання математичного опису об'єкта, обрання засобу вирішення рівнянь моделі, перевірки адекватності розробленої моделі реальному фізичному об'єкту.

У результаті вивчення курсу здобувачі мають:

- ✓ знати принципи побудови математичних моделей різних технологічних процесів;
- ✓ вміти розв'язувати складні математичні рівняння за допомогою чисельних алгоритмів і з використанням сучасних комп'ютерних технологій;
- ✓ знаходити оптимальні умови функціонування об'єктів, що вивчаються;
- ✓ обґрунтовувати отримані результати.

Отже, запровадження методів математичного моделювання в освітній процес дає можливість здобувачам вищої освіти за спеціальністю «Біотехнології та біоінженерія» освітньої програми «Технології фармацевтичних препаратів» користуватися новими, ефективними засобами досліджень, виробництва та експлуатації технічних систем.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Математичне моделювання — метод наукового дослідження, заснований на пізнанні процесів, що вивчаються, за допомогою математичної моделі.

Моделювання полягає в заміні експерименту з оригіналом експериментом на моделі. Модель має будуватися так, щоб вона найповніше відтворювала ті якості об'єкта, які необхідно вивчити відповідно до поставленої мети. Модель має бути простішою за об'єкт і зручнішою для його вивчення. Тобто для одного і того самого об'єкта можуть існувати різні моделі, класи моделей, що відповідають різним цілям його вивчення.

Цілі і завдання моделювання:

- оптимальне проєктування нових та інтенсифікація технологічних процесів, що діють;
- контроль за ходом процесу, отримання необхідної інформації про нього і оброблення отриманої інформації з метою управління ходом технологічного процесу;
- вирішення завдань дослідження, де неможливо проводити активні експерименти — режими роботи реакторів, траєкторії космічних об'єктів тощо;
- максимальне прискорення перенесень результатів лабораторних досліджень у промислові масштаби.

Вимоги, що висуваються до моделі:

- значно менші витрати на створення моделі порівняно з витратами на створення оригіналу;
- чітко визначені правила інтерпретації результатів обчислювального експерименту;
- істотність моделі; ця вимога полягає в тому, що модель має відображати необхідні для вирішення конкретного завдання властивості об'єкта. Для одного і того самого об'єкта складно створити узагальнену модель, що відображає всі його властивості.

Метод математичного моделювання базується на математичній подібності. У математично подібних об'єктів процеси володіють різною фізичною природою, а описуються ідентичними рівняннями (табл. 1.1). Можливість установлення подібності між різнорідними за фізичною природою об'єктами не випадкова. У природі через її матеріальну єдність для всіх якісних різновидів матерії є загальні кількісні співвідношення. Це дозволяє узагальнювати процес пізнання, не зважаючи на деталі і зображати аспекти, що цікавлять дослідника, математично у вигляді функціональних залежностей.

Таблиця 1.1

Природа явища	Математичний опис	
	стаціонарний процес	нестационарний процес
Перенесення тепла (закон Фур'є)	$q = -\lambda \frac{dT}{dx}$	$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial \ell^2}$
Перенесення речовини (закон Фіка)	$j = -D \frac{dC}{dx}$	$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$
Перенесення кількості руху (закон Ньютона)	$f = -\mu \frac{d\omega}{dx}$	$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$
Перенесення електрики (закон Ома)	$I = -\frac{1}{\rho} \frac{dU}{dx}$	$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{RC} \frac{\partial^2 U}{\partial \ell^2}$

Наведені диференційні рівняння мають ідентичний математичний запис, до їх складу входять відповідні градієнти температури, концентрації, швидкості і напруги. Практика наукових досліджень показує, що одним диференціальним рівнянням можна описати цілий клас однорідних по своїй суті явищ (ізоморфних), а для виділення з нього конкретного явища необхідно обмежити вказане рівняння додатковими умовами. Умови однозначності містять: геометричну форму і розміри системи, істотні для конкретного процесу константи, граничні і початкові умови.

У практиці дослідження процесів за допомогою математичного моделювання порівняно просто вдається змінювати параметри досліджуваного об'єкта і з'ясовувати їх вплив на якість його роботи в цілому. Це можливо тому, що деформація моделі процесу вивчається не на фізичній моделі, а безпосередньо на математичній під час використання комп'ютерної техніки.

Складання математичних моделей досліджуваних об'єктів здійснюється за етапами, властивості яких визначаються складністю об'єкта, наявністю відомостей про зв'язки між його параметрами й іншу інформацію. Проте незалежно від змісту, кількості і послідовності можливих етапів у ході математичного моделювання об'єктів завжди доводиться вирішувати три основні завдання:

- складання моделі;
- знаходження рішення моделі;
- перевірка адекватності моделі процесу, що вивчається.

Складання моделі. Вирішення цього завдання полягає, по-перше, в установленні зв'язків між параметрами, додаткових умов (граничні і початкові умови); по-друге, у формалізації процесу у вигляді системи математичних співвідношень, що характеризують об'єкт, який вивчається. Математичний опис складається на основі матеріальних і енергетичних балансів, а також фізичних законів, що визначають перехідні процеси в об'єктах або характеризують специфічні особливості процесу. До системи математичного опису загалом можуть входити рівняння алгебри, звичайні диференційні рівняння і диференційні рівняння у частинних похідних, емпіричні формули, логічні умови тощо.

Знаходження розв'язку моделі полягає у розв'язанні математичної моделі. Параметри (коефіцієнти) складених рівнянь функціонально залежать від визначальних розмірів, властивостей речовин і величин, що характеризують перебіг фізико-хімічних процесів (константи швидкості, коефіцієнти дифузії і т. п.). Ці параметри або задають заздалегідь, або розраховують, або знаходять за формулами, що одержують з відомих критеріальних залежностей.

В окремих найбільш простих випадках можливі точні аналітичні вирішення рівнянь моделі. Але, як правило, для реалізації складних математичних моделей застосовується комп'ютерна техніка.

Розв'язок задачі отримують у різних варіантах залежно від параметрів, початкових умов, збурливих чинників, значення яких за необхідності змінюються. Це дозволяє аналізувати перебіг процесу в напрямі, що цікавить дослідника.

Перевірка адекватності моделі процесу, що вивчається. Змістом цього завдання є перевірка відповідності математичної моделі досліджуваному процесу, яку необхідно проводити, оскільки будь-яка модель є лише наближеним відзеркаленням реального процесу унаслідок допущень, що приймаються. Установлюється, наскільки прийняті допущення правомірні, тобто чи застосовна отримана модель для досліджуваного процесу.

Класифікація математичних моделей здійснюється за такими ознаками:

1) параметри математичних моделей загалом можуть змінюватися в *часі* і *просторі*. Враховуючи просторові ознаки, розрізняють моделі з розподіленими параметрами і моделі із зосередженими параметрами. Якщо основні змінні процесу змінюються в часі і в просторі, то моделі, що описують такі процеси, називають моделями з розподіленими параметрами. Зазвичай вони мають вид диференціальних рівнянь у частинних похідних. Якщо основні змінні не змінюються у просторі, а тільки в часі, моделі називають із зосередженими параметрами і представляють їх у вигляді звичайних диференціальних рівнянь;

2) за характером режимів процесів, які перебігають у модельованих об'єктах, розрізняють *статичні* і *динамічні* моделі. Статична модель містить опис зв'язків між основними змінними в сталих режимах (у рівноважному стані без зміни в часі). Динамічна модель містить опис зв'язків між основними змінними в часі у разі переходу від одного режиму до іншого. Універсальним видом опису динамічної характеристики є диференціальне рівняння. Сукупність статичної і динамічної моделей з обмеженнями і додатковими умовами називають повною *математичною моделлю процесу*. Така модель відображає зв'язки між змінними як у статиці, так і в динаміці;

3) за природою процесів розрізняють моделі *детерміновані* й *імовірнісні*. Для детермінованих процесів передбачається, що параметри стану однозначно визначаються завданням вхідних управлінських дій. Для складання детермінованих моделей використовують різні класичні методи математики й отримують диференціальні рівняння, лінійні, різницеві, інтегральні, оператори для зведення до рівнянь алгебри тощо. Моделі називають імовірнісними, якщо вони описують

процеси, які за своєю природою характеризують як випадкові. Для вивчення таких процесів зазвичай використовують математичний апарат теорії вірогідності, за допомогою якого параметри стану оцінюються у термінах математичного очікування, а збурливі параметри характеризуються імовірнісними законами розподілу.

Модель має задовольняти фізичному сенсу того, що вивчається об'єкт; вибір способу математичного опису має визначатися можливістю і зручністю його чисельної реалізації.

Питання для самоконтролю

1. У чому полягає метод математичного моделювання?
2. Перерахуйте основні етапи складання математичної моделі.
3. Назвіть вимоги, які висуваються до математичної моделі.
4. У чому полягає перевірка математичної моделі на адекватність?
5. За якими ознаками класифікуються математичні моделі?
6. Дайте визначення математичної моделі з розподіленими і зосередженими параметрами.
7. У чому різниця між детермінованими та імовірнісними моделями?

2. МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРОДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ У СТАЦІОНАРНОМУ РЕЖИМІ

2.1. Основні теоретичні відомості

До класу гідродинамічних належать процеси переміщення рідин і газів по трубопроводах і апаратах, перемішування у рідких середовищах, процеси оброблення неоднорідних рідких і газових систем (розділення суспензій і емульсій шляхом відстоювання, фільтрування, центрифугування тощо). Швидкість гідродинамічних процесів визначається законами динаміки і гідродинаміки.

Рух однорідного потоку описується системою, що складається з рівняння матеріального балансу в об'ємі dV (рівняння нерозривності потоку):

а) для нестационарного потоку рідини, що стискається:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

б) для стаціонарного потоку нестискуваної рідини:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (\rho = \text{const}) \quad (2.1a)$$

і рівнянь руху Нав'є-Стокса:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z \right) &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z \right) &= -\rho g - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Окрім цих рівнянь, мають бути відомі граничні і початкові умови.

Рівняння Нав'є-Стокса не можуть бути розв'язані в загальному вигляді. Розв'язання цієї складної системи рівнянь отримані тільки для деяких окремих випадків. У більшості найбільш важливих у промисловій практиці випадків застосування рівнянь Нав'є-Стокса стає можливим або за наявності низки спрощувальних допущень, або за перетворення рівнянь методами теорії подібності.

Під час руху ідеальної рідини, коли сили тертя відсутні, із системи рівнянь (2.2) отримують окремий випадок рівняння Нав'є-Стокса — диференціальне рівняння руху ідеальної рідини Ейлера для несталоного потоку:

$$\begin{aligned}\rho \frac{du_x}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \frac{du_y}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho \frac{du_z}{dt} &= -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}$$

Розв'язання рівнянь руху Ейлера для сталого потоку дає одне з найбільш важливих і широко використовуваних рівнянь гідродинаміки — рівняння Бернуллі:

$$z + \frac{P}{\rho g} + \frac{w^2}{2g} = \text{const}$$

Для дотримання балансу енергії під час руху реальної рідини в рівняння Бернуллі вводять додаткову складову, що виражає втрачений напор:

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} + h_n \quad (2.3)$$

Одне з головних завдань гідродинаміки, що часто виникає під час дослідження технологічних об'єктів — визначення перепаду тиску на ділянці вимушеного руху однофазного потоку за заданої швидкості потоку.

Втрати тиску на ділянках трубопроводу з гідравлічними опорами (зміна діаметра, засувки, вентилі, повороти труби тощо) обчислюють за рівнянням:

$$\Delta P = \left(\lambda_i \cdot \frac{l_i}{d_i} + \xi_i \right) \frac{\rho \cdot w^2}{2} \quad (2.4)$$

Коефіцієнт залежить від виду місцевого опору, геометричних розмірів трубопроводу і знаходиться експериментально.

Опір тертя існує під час руху реальної рідини по всій довжині трубопроводу. На його величину впливає режим плину рідини. Величину, що показує, у скільки разів натиск, втрачений на тертя, перевищує швидкісний натиск, називають коефіцієнтом *опору тертя* ($\lambda \frac{l}{d}$), а величину λ — коефіцієнтом тертя:

$$\lambda = \begin{cases} \frac{64}{Re} - \text{ламiнарний} \\ \frac{0,316}{Re^{0,25}} - \text{турбулентний} \end{cases}$$

Коефіцієнт опору тертя враховує вплив двох чинників: втрати тиску на внутрішнє тертя рідини і втрати тиску від взаємодії з поверхнею труби. Для ламінарного режиму руху рідини, коли $Re < 2300$, величина λ_i визначається силами внутрішнього тертя і не залежить від стану поверхні труби. Для перехідного і розвинутого турбулентного режимів коефіцієнт λ_i має враховувати розміри шорсткості труби. Визначають λ_i експериментальним шляхом.

Отже, для забезпечення руху потоку по ділянці труби необхідно створити такий тиск (рівняння стаціонарного руху рідини із заміною $w = \frac{V}{S}$):

$$|P_i - P_{i+1}| = \left(\lambda_i \frac{\ell_i}{d_i} + \xi_i \right) \frac{\rho \cdot V_i^2}{2 \cdot (0,25\pi \cdot d_i^2)^2} \quad (2.5)$$

Для коротких ділянок труб силами в'язкого тертя можна нехтувати, тоді рівняння (2.5) набуває вигляду:

$$|P_i - P_{i+1}| = \xi_i \frac{\rho \cdot V_i^2}{2 \cdot (0,25\pi \cdot d_i^2)^2} \quad (2.6)$$

2.2. Математична модель розгалуженої гідравлічної системи

Швидкість рідини — векторна величина, яка характеризується не тільки модулем (м/с), але і напрямком. За позитивний обирають напрямок зліва направо ($\rightarrow$) і зверху вниз ($\downarrow$). Витрату рідини (V) вважають також векторною величиною, яка характеризується абсолютним значенням і напрямком. У зв'язку з цим використовують для створення моделі знакову функцію $\text{sign}(V_i)$, яка має такі **властивості**:

- стаціонарний рух рідини по прямолінійній ділянці описує рівняння:

$$P_i - P_{i+1} = \alpha_i \cdot V_i^2 \cdot \text{sign}(V_i) , \quad (2.7)$$

- для аналізу роботи розгалуженої гідравлічної системи необхідно використовувати також рівняння матеріального балансу:

$$V = \sum_{i=1}^N V_i \quad (2.8)$$

Розглянемо конкретну схему гідравлічної системи (рис. 2.1).

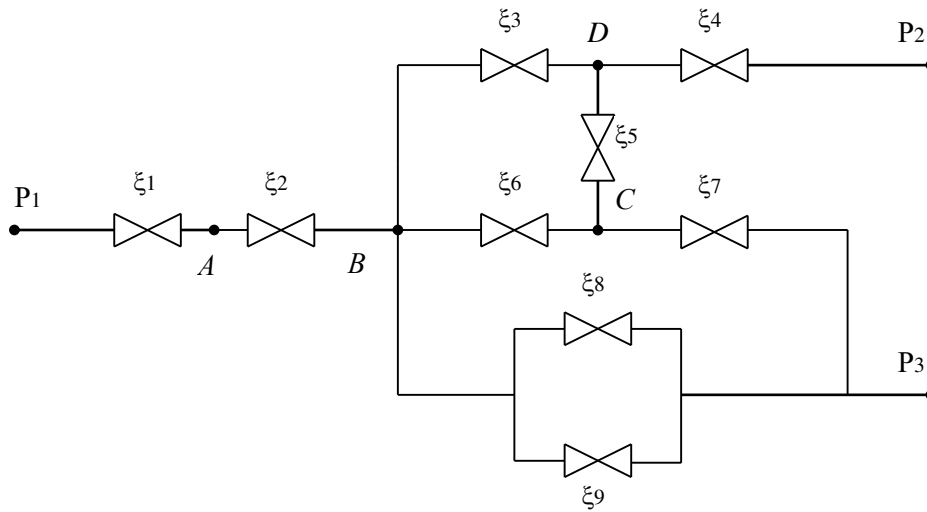


Рис. 2.1. Схема гідравлічної системи

Система поділена на декілька прямолінійних ділянок діаметром d_i . На кожній ділянці всі місцеві опори об'єднані в загальний коефіцієнт ξ_i , значення якого розраховують за довідковими даними. Зовнішній тиск мережі характеризується точками $P1$, $P2$, і $P3$. Ці параметри найчастіше задані. Невідомими параметрами системи є тиск у внутрішніх точках PA , PB , PC , PD і витрати на ділянках $V1$, $V2$, $V3$, $V4$, $V5$, $V6$, $V7$, $V8$, $V9$. Складають рівняння сталого руху рідини для кожної ділянки, нехтуючи опором тертя в них (див. рівняння 2.7):

$$\begin{aligned}
 P1 - PA &= V1^2 \cdot \alpha_1 \cdot \text{sign}(V1) \\
 PA - PB &= V2^2 \cdot \alpha_2 \cdot \text{sign}(V2) \\
 PB - PD &= V3^2 \cdot \alpha_3 \cdot \text{sign}(V3) \\
 PB - PC &= V6^2 \cdot \alpha_6 \cdot \text{sign}(V6) \\
 PD - P2 &= V4^2 \cdot \alpha_4 \cdot \text{sign}(V4) \\
 PD - PC &= V5^2 \cdot \alpha_5 \cdot \text{sign}(V5) \\
 PC - P3 &= V7^2 \cdot \alpha_7 \cdot \text{sign}(V7) \\
 PB - P3 &= V8^2 \cdot \alpha_8 \cdot \text{sign}(V8)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

У наведеній системі рівнянь містяться тринадцять невідомих (PA , PB , PC , PD , $V1$, $V2$, $V3$, $V4$, $V5$, $V6$, $V7$, $V8$, $V9$). Для вирішення рівнянь (2.9) необхідно скласти ще чотири рівняння. Цими рівняннями будуть рівняння матеріальних балансів:

$$\begin{aligned}
 V1 &= V2 \\
 V2 &= V3 + V6 + V8 + V9 \\
 V3 &= V5 + V4 \\
 V7 &= V6 + V5
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Отримують тринадцять нелінійних алгебраїчних рівнянь з тринадцятьма невідомими. Ця система рівнянь є математичною моделлю роботи розгалуженої гідросистеми.

1. Визначення витрати рідини на кожній ділянці V_i за заданого зовнішнього U .

3. Підбір коефіцієнтів ξ_i для забезпечення заданої витрати у гілках системи.

Перед вирішенням зазначених завдань необхідно заздалегідь перевірити здатність моделі. Модель має відображати різні режими роботи. Наприклад, криття пристрою 8 ($\xi_8 \rightarrow \infty$) дає рівність: $V_9 = V_3 + V_6$.

Гідросистема може бути дуже розгалуженою. Це спричиняє за собою створення складної математичної моделі. У такому разі систему намагаються спростити. Ідея редукції (спрощення) полягає в заміні складної ділянки простішою схемою з деяким еквівалентним місцевим опором. Заміну проводять, якщо вона полегшує виконання основного завдання. Досліджуваний параметр у такому разі не повинен входити в ділянку, що спрощують. Переважно спрощують ділянки, які розташовані послідовно або паралельно.

a)

b)

Запишемо математичну модель початкової системи, наведеної на рис. 2.2а, враховуючи кожную прямолінійну ділянку:

12

Результатом складання рівнянь системи (2.11) є рівність:

$$P1 - P_{n+1} = V1 \cdot \alpha_1 \cdot \text{sign}(V1) + \dots + V_n \cdot \alpha_n \cdot \text{sign}(V_n), \quad (2.12)$$

яка дозволяє розрахувати необхідний перепад тиску в усій системі. Враховуючи, що за послідовного з'єднання витрати на ділянках однакові, рівняння (2.12) набуває вигляду:

$$P1 - P_{n+1} = V^2 \cdot (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \text{sign}(V) \quad (2.13)$$

Порівнюючи рівняння (2.12) і (2.13), отримують можливість розрахунку еквівалентного коефіцієнту:

$$\alpha_{\text{eKB}} = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \quad (2.14)$$

Розглянемо паралельне з'єднання звужувальних пристроїв (рис. 2.3).

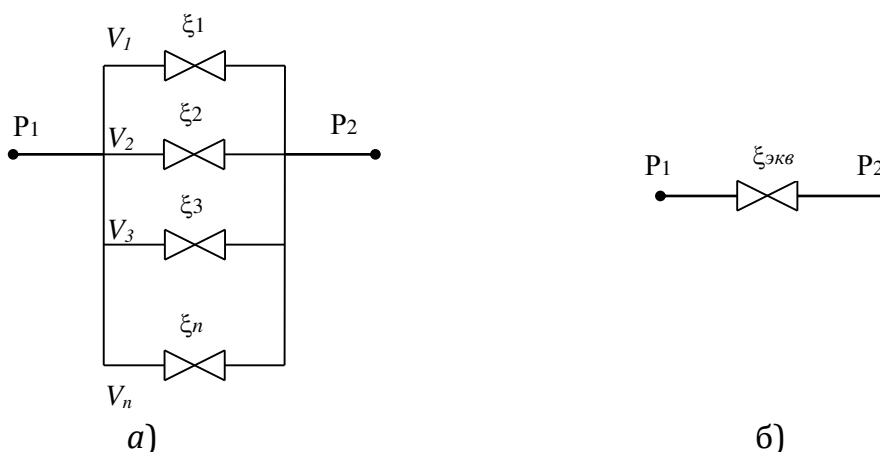


Рис. 2.3. Схема паралельного з'єднання звужувальних пристроїв:
а) початкова схема; б) спрощена схема

Математична модель початкової системи містить рівняння руху рідини по кожній прямолінійній ділянці:

$$\begin{cases} P1 - P2 = V1^2 \cdot \alpha_1 \cdot sign(V1) \\ P1 - P2 = V2^2 \cdot \alpha_2 \cdot sign(V2) \\ \\ P1 - P2 = V_n^2 \cdot \alpha_n \cdot sign(V_n) \end{cases} \quad (2.15)$$

Кожне з рівнянь системи (2.15) можна записати щодо витрати:

$$\begin{cases} V1 = \sqrt{\frac{|P_1 - P_2|}{\alpha_1}} \text{sign}(P_1 - P_2) \\ \dots\dots\dots \\ V_n = \sqrt{\frac{|P_1 - P_2|}{\alpha_n}} \text{sign}(P_1 - P_2) \end{cases} \quad (2.16)$$

Враховуючи, що за паралельного з'єднання виконується умова (2.7), то систему рівнянь можна привести до вигляду:

$$V1+...+V_n = \sqrt{|P1 - P2|} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \right) \cdot \text{sign}(P1 - P2) \quad (2.17)$$

$$V = \sqrt{\frac{|P1-P2|}{\alpha_{\text{eKB}}}} \text{sign}(P1 - P2),$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_{\text{еКВ}}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}$$

$$\alpha_{\text{eKB}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}\right)^2} \quad (2.18)$$

2.3. Методи розв'язання системи нелінійних рівнянь алгебри

З математичного погляду аналіз розгалуженої гідравлічної системи зводиться до розв'язання нелінійних систем рівнянь алгебри. Для розв'язання таких систем найважливіше значення має вибір стартових значень невідомих. Чим більше невідомих, тим важче підібрати їх. Під час складання моделі прагнуть максимально спростити її. Спрощення, що вводяться, пов'язані з можливістю заміни кількох послідовних або паралельних ділянок однією з деякою еквівалентною пропускною спроможністю, що зменшує кількість невідомих.

Вибір відповідного методу для вирішення залежить від характеру певного завдання. Завдання, що зводяться до розв'язання рівнянь алгебри і трансцендентних, можна класифікувати за кількістю рівнянь, залежно від пропонованого характеру і кількості рішень (рис. 2.4).

Нелінійні рівняння діляться на два класи: трансцендентні й алгебраїчні.

Алгебраїчними рівняннями називаються рівняння, що містять лише алгебраїчні функції (цілі, раціональні, ірраціональні). Наприклад, багаточлен є цілою функцією алгебри.

Рівняння, що містять інші функції (тригонометричні, показові, логарифмічні тощо) називаються **трансцендентними**.

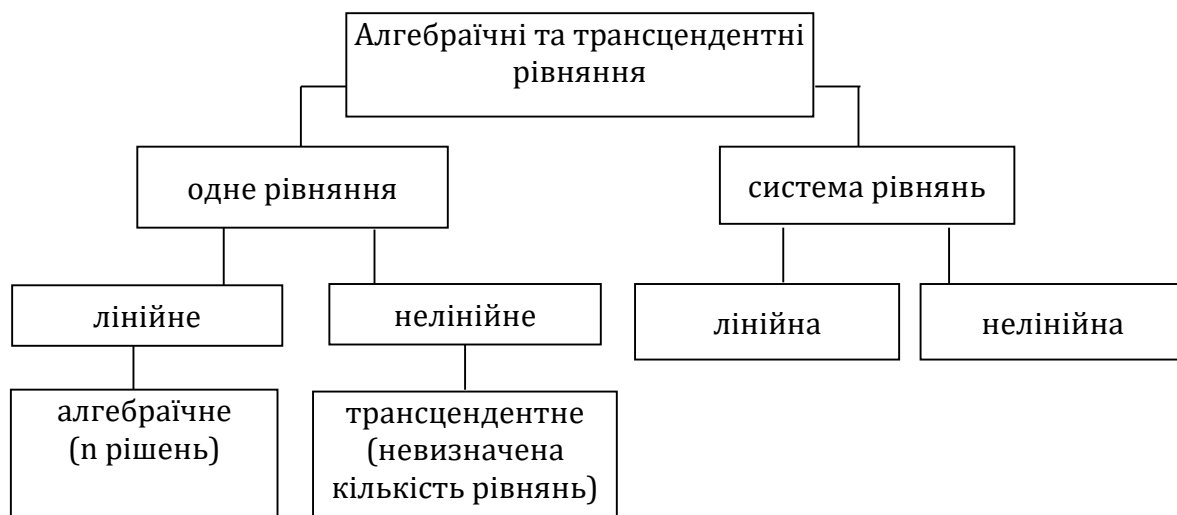


Рис. 2.4. Класифікація завдань за кількістю рівнянь математичній природі і кількості рішень

Методи вирішення нелінійних рівнянь діляться на дві групи: точні й ітераційні.

Точні методи дозволяють записати рішення у вигляді деякого кінцевого співвідношення (формули).

Багато рівнянь і систем рівнянь не мають аналітичних рішень. Доведено також, що не можна побудувати формулу, за якою можна було б розв'язати алгебраїчне рівняння вище четвертого ступеня. Крім того, іноді рівняння містить коефіцієнти, відомі лише приблизно, а отже, саме завдання про точне визначення рішення рівняння втрачає сенс. Для їхнього вирішення використовуються ітераційні методи із заданим ступенем точності.

Завдання знаходження кореня рівняння ітераційним методом складається з двох етапів:

- ✓ відділення кореня — завдання наближеного значення кореня;
- ✓ уточнення наближеного кореня — доведення їх до заданого ступеня точності.

В інженерній практиці поширений графічний спосіб визначення наближеного кореня. Наближення значень також можуть бути набуті з фізичного сенсу завдання.

Ітераційний процес полягає в послідовному уточненні початкового наближення. Кожен такий крок називається ітерацією. У результаті ітерацій знаходиться послідовність наближених значень кореня. Якщо ці значення зі збільшенням числа ітерацій наближаються до дійсного значення кореня, то говорять, що ітераційний процес сходиться.

Різні підходи до процесу ітерацій зумовили існування різних методів (метод половинного ділення, метод хорд, метод Ньютона, метод простої ітерації, метод Зейделя та ін.).

Метод простої ітерації. Метод Зейделя

Зручним прийомом розв’язання системи нелінійних рівнянь алгебри є *метод ітерацій* (повторень). Для застосування цього методу початкову систему рівнянь потрібно записати у перетвореній формі, тобто розв’язати кожне рівняння щодо однієї з невідомих. Наприклад, для системи, зображеної на рис. 2.1, маємо:

$$\begin{cases} V1 = \phi_1(V1,V2,\dots V9,PA,PB,PC,PD) \\ V2 = \phi_2(V1,V2,\dots V9,PA,PB,PC,PD) \\ \vdots \\ PA = \phi_{13}(V1,V2,\dots V9,PA,PB,PC,PD) \end{cases}$$

Задають початкові (стартові значення $V1_0, V2_0, V9_0, PA_0, PB_0, PC_0, PD_0$) — нульові наближення. Ці значення підставляють у праві частини системи і розраховують невідомі — перші наближення:

$$\begin{cases} V1' = \phi_1(V1^0, V2^0, \dots, V9^0, PA^0, PB^0, PC^0, PD^0) \\ V2' = \phi_2(V1^0, V2^0, \dots, V9^0, PA^0, PB^0, PC^0, PD^0) \\ \vdots \\ PA' = \phi_{13}(V1^0, V2^0, \dots, V9^0, PA^0, PB^0, PC^0, PD^0) \end{cases}$$

Для отримання наступного наближення у праву частину рівнянь замість нульових наближень підставляють отримані значення і так далі за схемою:

$$\begin{cases} x = \phi(x) \\ x_1 = \phi(x_0) \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \phi(x_n) \end{cases}$$

ДОТИ, ДОКИ НЕ БУДУТЬ ВИКОНАНІ УМОВИ:

$$\begin{cases} |V1^i - V1^{i+1}| < \varepsilon_1 \\ |V2^i - V2^{i+1}| < \varepsilon_2, \\ \dots\dots\dots \\ |P_m^i - P_m^{i+1}| < \varepsilon_{m+n} \end{cases}$$

де ε — абсолютна похибка розрахунку.

Геометрична суть ітераційного процесу. Простежимо за ходом ітераційного процесу на прикладі функції. Побудуємо графіки функцій $y = x$ (рис. 2.5). Коренем рівняння є абсциса точки перетину кривої з бісектрисою координатного кута $y = x$. Якщо x_0 — абсциса нульового наближення, то дорівнює ординаті відповідній точки M кривої, або абсциса точки M — перше наближення невідомого кореня рівняння. Аналогічно знаходяться наступні наближення.

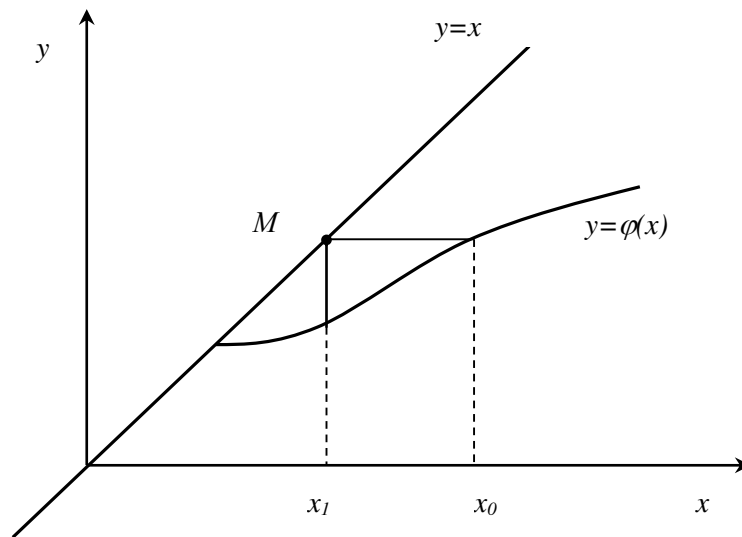


Рис. 2.5. Геометрична інтерпретація ітераційного процесу

За способом Зейделя можна отримати за такої самої кількості кроків точніші результати, ніж звичайні ітерації (або та сама точність може бути досягнута за меншу кількість кроків). Задаються стартові значення, які підставляють у перше рівняння. Стартові значення підставляють у перше рівняння і розраховують першу невідому V_1 . У друге рівняння підставляють всі стартові значення, окрім V_1 . Значення V_1 підставляють те, яке було визначено в першому рівнянні. Розрахунки за такою схемою повторюють доти, доки не буде досягнута задана похибка обчислення:

$$\begin{cases} |V_1^i - V_1^{i+1}| < \varepsilon_1 \\ |V_2^i - V_2^{i+1}| < \varepsilon_2, \\ \dots\dots\dots \\ |P_m^i - P_m^{i+1}| < \varepsilon_{m+n} \end{cases}$$

де ε — абсолютна похибка розрахунку.

2.4. Розв'язання системи нелінійних рівнянь засобами Mathcad 14

Математичний пакет Mathcad 14 дає можливість розв'язувати систему нелінійних рівнянь за допомогою ітераційних методів. Максимальна кількість рівнянь і, відповідно, змінних дорівнює п'ятдесяти. Результатом розв'язання системи рівнянь буде числове значення кореня.

Для розв'язання системи рівнянь необхідно виконати таке:

- задати початкові наближення для всіх невідомих рівнянь, що входять у систему;
- надрукувати ключове слово *Given* — воно вказує, що далі слідує система рівнянь;

- ввести рівняння і нерівності у будь-якому порядку (використовуйте поєднання клавіш Ctrl= для друку символу «дорівнює»);
- ввести будь-який вираз, який містить функцію *Find*, наприклад: $z=Find(a1,a2)$.

Кількість аргументів має дорівнювати числу невідомих.

Ключове слово *Given*, рівняння (нерівності), які слідують за ним, і вираз, що містить функцію *Find*, називають блоком розв'язання рівнянь. Повідомлення про помилку *No solution was found* з'являється:

- коли поставлене завдання не може мати рішення;
- у процесі пошуку рішення послідовність наближень потрапила в точку локального мінімуму (для пошуку рішення потрібно задати різні початкові наближення);
- можливо, поставлене завдання не може бути розв'язане із заданою точністю. У такому разі необхідно збільшити значення *TOL*. Щоб змінити значення *TOL* в певній точці робочого документа, використовуйте визначення виду $TOL:= 0,01$. Щоб змінити значення *TOL* для всього робочого документа, виберіть команду Математика $\Rightarrow$ Параметри $\Rightarrow$ Змінні Допуск збіжності (*TOL*).

На функцію *Find* схожа функція *Minner* (використовує той же алгоритм). Якщо в результаті пошуку не може бути отримане подальше уточнення поточного наближення до розв'язку, *Minner* повертає це наближення. Функція *Find* у цьому випадку дає повідомлення про помилку. Правила використання функції *Minner* такі самі, як і функції *Find*.

Для простих рівнянь виду $f(x)=0$ рішення у Mathcad 14 знаходиться за допомогою функцій *root* ($f(x1, x2 .), x1, a, b$), де $f(x1, x2 .)$ — функція або вираз, визначені в робочому документі, $x1$ — ім'я змінної, яка використовується у виразі. Цій змінній перед використанням функції *root* необхідно присвоїти числове значення — початкове наближення для пошуку кореня; a, b — відрізок $[a,b]$ пошуку кореня (використовувати необов'язково, але якщо використовують, то він має бути дійсним, причому $a < b$).

2.5. Приклади розв'язування завдань

Приклад 2.1. Задана розгалужена гідравлічна система (рис. 2.6).

Зовнішній тиск у системі: на вході — $P_A = 5,5$ атм, на виході — $P_T = 1,2$ атм. У табл. 2.1 і 2.2 наведені коефіцієнти місцевих опорів та діаметри для кожної окремої ділянки системи.

Таблиця 2.1

Коефіцієнти опорів на ділянках

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ξ	4,6	7,3	8,3	7,8	12,8	5,5	7,3	7,7	8,5	4,9	17,3	8,3	4,8	7,3

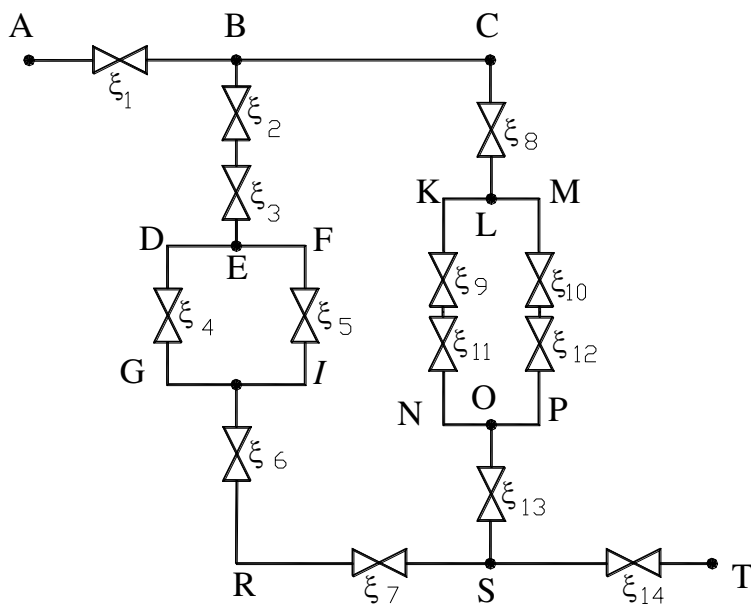


Рис. 2.6. Розгалужена гідравлічна система (до прикладу 2.1)

Таблиця 2.2

Діаметри ділянок гідросистеми

Ділянка	A-C	B-E	D-G	F-I	H-R	R-S	C-L	K-N	M-P	O-S	S-T
d, мм	350	200	35	40	200	200	210	45	35	210	250

Треба провести дослідження витрати в гілці $D-G$ залежно від коефіцієнта місцевого опору ξ_5 на ділянці 5 ($F-I$).

Для розв'язання завдання необхідно зробити такі дії:

- побудувати спрощену схему гідросистеми;
- розробити математичну модель спрощеної еквівалентної гідросистеми;
- перевірити, наскільки правильно відображає математична модель режими роботи досліджуваної гідросистеми;
- варіюючи величиною коефіцієнта опору звужувального пристрою ξ_5 , провести розрахунок у гілці $D-G$. Результати багатьох експериментів занести в таблицю і за даними цієї таблиці побудувати графік залежності витрати від коефіцієнта опору.

Розв'язання із застосуванням Mathcad 14. Спочатку спрощуємо задану розгалужену гідравлічну систему відповідно до умов завдання (рис. 2.7). З'єднаємо послідовно ділянки 2 і 3 (еквівалентну ділянку запишемо як 23), 9 і 10 (еквівалентна ділянка 910) та 11 і 12 (еквівалентна ділянка 1112). Потім паралельно 910 та 1112 (еквівалентна ділянка 912), послідовно 8,912 і 13 (еквівалентна ділянка 813). Ділянки 4 і 5 не з'єднуємо, тому що за умовою завдання ділянку 5 необхідно виділити окремо.

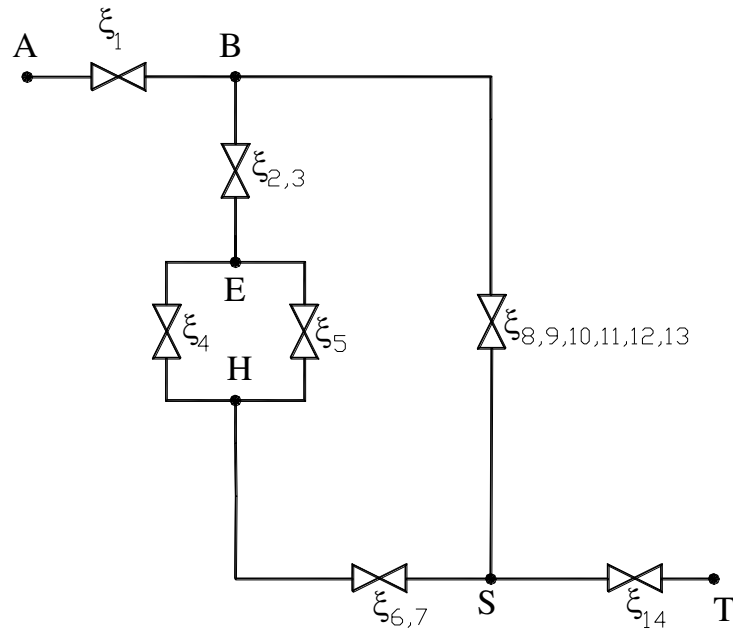


Рис. 2.7. Спрощена схема гідравлічної системи

Для отриманої спрощеної схеми створюємо математичну модель. Запишемо рівняння перепаду тиску для кожної ділянки:

$$\begin{aligned}
 PA - PB &= \alpha_1 \cdot V_1^2 \\
 PB - PC &= \alpha_2 \cdot V_2^2 \\
 PB - PD &= \alpha_{23} \cdot V_2^2 \\
 PE - PH &= \alpha_4 \cdot V_4^2 \\
 PE - PH &= \alpha_5 \cdot V_5^2 \\
 PH - PS &= \alpha_{67} \cdot V_6^2 \\
 PS - PT &= \alpha_{14} \cdot V_{14}^2,
 \end{aligned}$$

де α_{812} — еквівалентний показник опору для ділянок 8, 9, 10, 11, 12 і 13; α_{23} — для ділянок 2 і 3; α_{67} — для ділянок 6 і 7.

Для розв'язання цієї системи кількість рівнянь має дорівнювати кількості невідомих. Оскільки невідомих у рівнянні одинадцять (PB , PE , PH , PS , V_1 , V_2 , V_4 , V_5 , V_6 , V_8 , V_{14}), а рівнянь усього сім, то відсутню кількість рівнянь отримаємо, використовуючи рівняння матеріальних балансів:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= V_2 + V_8 \\
 V_2 &= V_4 + V_5 \\
 V_{14} &= V_8 + V_2 \\
 V_1 &= V_{14}
 \end{aligned}$$

Для розрахунку невідомих параметрів еквівалентної моделі вводимо значення коефіцієнтів опорів у вигляді матриці (рис. 2.8) і виводимо результати розрахунку цього параметра (рис. 2.9).

Уведемо рівняння розрахунку α для кожної окремої ділянки:

$$\alpha_i := \frac{\xi_i \cdot \rho}{2 \cdot (0.25 \cdot \pi \cdot d^2)^2}$$

$$\xi := \begin{pmatrix} 4.6 \\ 7.3 \\ 8.3 \\ 7.8 \\ 12.8 \\ 5.5 \\ 7.3 \\ 7.7 \\ 8.5 \\ 4.9 \\ 17.3 \\ 8.3 \\ 4.8 \\ 7.3 \end{pmatrix} \quad d := \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.035 \\ 0.04 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.21 \\ 0.045 \\ 0.035 \\ 0.035 \\ 0.035 \\ 0.21 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.8. Уведення вихідних даних

	1
1	498.469
2	$1.923 \cdot 10^3$
3	$2.051 \cdot 10^3$
4	$6.491 \cdot 10^4$
5	$6.366 \cdot 10^4$
6	$1.669 \cdot 10^3$
7	$1.923 \cdot 10^3$
8	$1.791 \cdot 10^3$
9	$4.099 \cdot 10^4$
10	$3.112 \cdot 10^4$
11	$9.667 \cdot 10^4$
12	$6.696 \cdot 10^4$
13	$1.414 \cdot 10^3$
14	$1.231 \cdot 10^3$

Рис. 2.9. Результати розрахунку коефіцієнтів опору кожної ділянки

Складемо рівняння визначення еквівалентних α для спрощеної схеми:

- для послідовного з'єднання звужувальних пристроїв на ділянках:

$$\begin{aligned} \text{B-E} \quad \alpha_{23} &= \alpha_2 + \alpha_3 \\ \text{H-S} \quad \alpha_{67} &= \alpha_6 + \alpha_7 \\ \text{K-N} \quad \alpha_{911} &= \alpha_9 + \alpha_{11} \\ \text{M-P} \quad \alpha_{1011} &= \alpha_{10} + \alpha_{11} \end{aligned}$$

- для паралельного з'єднання звужувальних пристроїв на ділянках:

$$\text{K-N і M-P,}$$

- для послідовного з'єднання звужуючих пристроїв на ділянках:

$$\text{B-L, L-O, O-S} \quad \alpha_{813} = \alpha_8 + \alpha_{912} + \alpha_{13}.$$

Розрахунок параметрів у Mathcad дає такі результати:

$$\begin{aligned} \alpha_{23} &= 3.974 \times 10^3 \\ \alpha_{67} &= 3.592 \times 10^3 \\ \alpha_{911} &= 1.377 \times 10^5 \\ \alpha_{1012} &= 9.808 \times 10^4 \\ \alpha_{912} &= 2.884 \times 10^4 \\ \alpha_{813} &= 3.205 \times 10^4 \end{aligned}$$

Для розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, які описують роботу еквівалентної моделі, використовують обчислювальний блок *Given-Find*. Спочатку треба записати початкові наближення для всіх невідомих параметрів. Їх значення задаємо приблизно, виходячи з інженерних міркувань. Значення зовнішнього тиску залишаємо без змін, для всіх внутрішніх точок приймаємо значення у діапазоні від 5,5 до 1,2 атм і уводимо їх в одиницях системи СІ — Па:

$$\begin{aligned} P_A &:= 5.5 \cdot 10^5 & V_1 &:= 0.3 \\ P_B &:= 5.3 \cdot 10^5 & V_2 &:= 0.03 \\ & & V_4 &:= 0.01 \\ P_E &:= 4.8 \cdot 10^5 & V_5 &:= 0.02 \\ P_H &:= 4.5 \cdot 10^5 & V_6 &:= 0.1 \\ P_S &:= 3.5 \cdot 10^5 & V_8 &:= 0.03 \\ P_T &:= 1.2 \cdot 10^5 & V_{14} &:= 0.3 \end{aligned}$$

Для визначення початкових наближень витрат рідини на окремих ділянках, проводимо розрахунки за рівнянням (2.8). Враховуючи принцип складання балансових рівнянь, приймаємо витрати для ділянок ($\text{м}^3/\text{с}$):

$$\begin{aligned} V_1 &= 0,2 \\ V_2 &= 0,05 \\ V_4 &= 0,025 \\ V_5 &= 0,025 \\ V_6 &= 0,05 \\ V_8 &= 0,15 \\ V_{14} &= 0,2 \end{aligned}$$

Потім записуємо рівняння математичної моделі в обчислювальному блоці. Виводимо отримані результати розрахунку:

$$Z := \text{Find}(PB, PE, PH, PS, V_1, V_2, V_4, V_5, V_6, V_8, V_{14})$$

$$Z =$$

	1
1	$5.497 \cdot 10^5$
2	$5.45 \cdot 10^5$
3	$2.432 \cdot 10^5$
4	$1.221 \cdot 10^5$
5	0.037
6	0.017
7	$8.464 \cdot 10^{-3}$
8	$8.63 \cdot 10^{-3}$
9	0.097
10	0.02
11	0.037

Позиції 1-4 у матриці розв'язку відповідають тиску у внутрішніх точках системи PB, PE, PH, PS. Значення тиску у внутрішніх точках системи складають:

$$\begin{aligned} PB &= 5,497 \cdot 10^5 \text{ Па} \\ PE &= 5,45 \cdot 10^5 \text{ Па} \\ PH &= 2,432 \cdot 10^5 \text{ Па} \\ PS &= 1,221 \cdot 10^5 \text{ Па} \end{aligned}$$

Позиції 5-11 показують витрати на відповідних ділянках системи:

$$\begin{aligned} V_1 &= 0,037 \text{ м}^3/\text{с} \\ V_2 &= 0,017 \text{ м}^3/\text{с} \\ V_4 &= 8,464 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с} \\ V_5 &= 8,63 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с} \\ V_6 &= 0,097 \text{ м}^3/\text{с} \\ V_8 &= 0,02 \text{ м}^3/\text{с} \\ V_{14} &= 0,037 \text{ м}^3/\text{с} \end{aligned}$$

Для перевірки правильності математичної моделі проведемо декілька контрольних розрахунків. Наприклад, якщо закрити вентиль 2, то витрати ділянок 3-7 дорівнюють нулю і витрата V_1 дорівнює витраті V_{14} . У разі закриття вентиля 8 нульових значень набувають ділянки 9-13.

Щоб провести ці розрахунки, необхідно змінити первинні значення коефіцієнтів опорів на ділянках 2 або 8 максимально збільшити їх величини, наприклад, прийняти, що на ділянці $B-E$ $\xi_2 = 7300$. Тоді весь потік рідини переміщатиметься по гілці $B-C-S$.

Щоб визначити залежність витрати залежності витрати в гілці $D-G$ від коефіцієнта місцевого опору ξ_5 , змінюємо значення коефіцієнта й отримуємо такі дані:

$\xi_5 :=$	0	2.844×10^{-11}
	4.6	9.001×10^{-3}
	7.9	9.087×10^{-3}
	10	9.115×10^{-3}
	15	9.155×10^{-3}
	25	9.193×10^{-3}
	45	9.224×10^{-3}
	65	9.239×10^{-3}
	85	9.247×10^{-3}
	1000	9.288×10^{-3}

За даними матриці розв'язку будуюмо графічну залежність витрати V_4 від коефіцієнта місцевого опору ξ_5 . Графік залежності зображено на рис. 2.10.

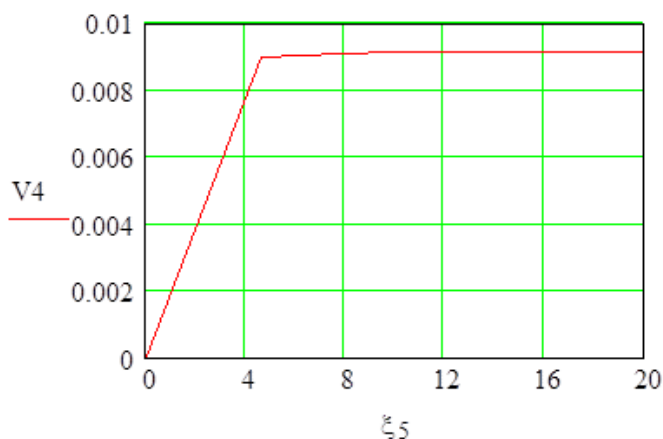


Рис. 2.10. Залежність витрати в гілці D-G від коефіцієнта місцевого опору ξ_5

Приклад 2.2. Дослідити вплив початкового тиску на витрату в системі (рис. 2.11): визначити тиск у точці В, а також побудувати графік залежності $P_1 = f(V_7)$.

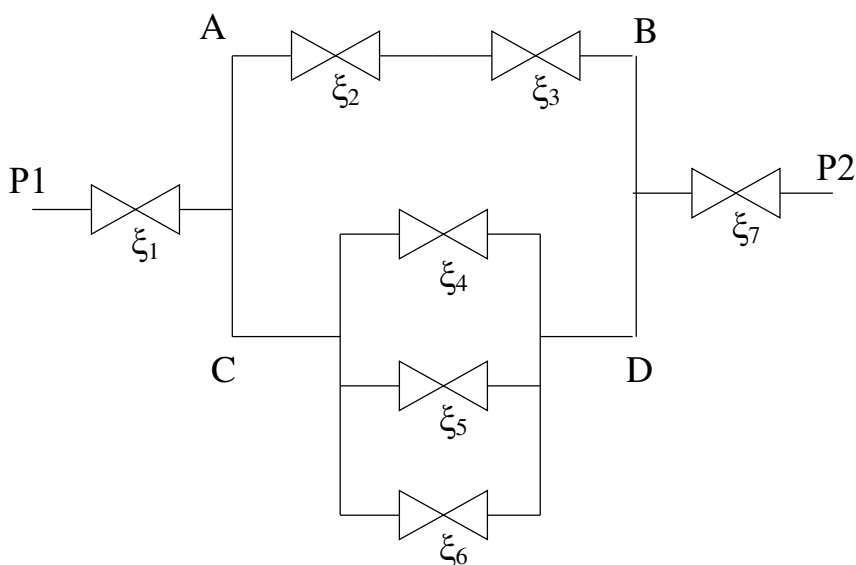


Рис. 2.11. Розгалужена гідравлічна система (до прикладу 2.2)

Вихідні дані для розрахунку:

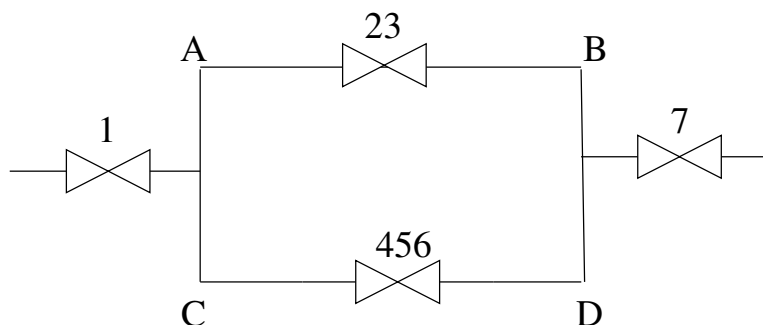
- ✓ перекачується рідина густиною 1200 кг/м^3 і динамічним коефіцієнтом в'язкості $1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$;
- ✓ тиск у мережі: $P_1 = 6,5, 5,5, 4,5 \text{ атм}$; $P_2 = 3,4 \text{ атм}$;
- ✓ коефіцієнти локальних опорів на ділянках і діаметри ділянок:

№ ділянки	1	2	3	4	5	6	7
ξ	2,4	4,6	3,5	3,5	6,5	4,0	5,0
d, мм	80	65	65	40	35	20	75

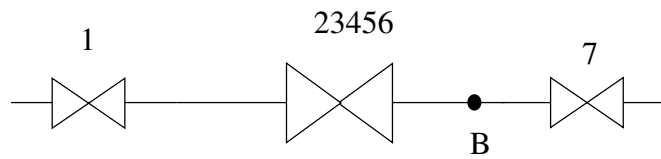
Розв'язання із застосуванням MS Excel.

Використовуючи метод редукції, спрощуємо схему відповідно до вимог завдання:

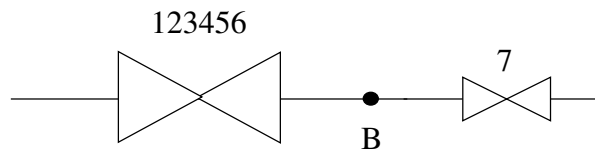
— перший етап:



— другий етап:



— третій етап:



Розрахунок еквівалентних α проводимо за формулами у зворотному порядку:

$$\begin{aligned}\alpha_{123456} &= \alpha_1 + \alpha_{23456} \\ \alpha_{23456} &= \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_{23}}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_{456}}}\right)^2} \\ \alpha_{23} &= \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_{2456} &= \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_4}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_5}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_6}}\right)^2}\end{aligned}$$

Складаємо математичний опис спрощеної схеми:

$$\begin{cases} P_1 - P_B = \alpha_{123456} \cdot V_1^2 \\ P_B - P_2 = \alpha_7 \cdot V_7^2 \\ V_1 = V_7 \end{cases}$$

У робоче поле MS Excel уводимо вихідні дані й обчислюємо коефіцієнти опорів окремих ділянок, а на їх підставі — еквівалентних (рис. 2.10). Далі записуємо систему рівнянь (рис. 2.11) і розв'язуємо її, використовуючи опцію «Пошук рішення» (рис. 2.12).

Для значення вхідного тиску $P_1 = 6,5$ атм тиск у точці B – $P_B = 496650,25$ Па, а витрата в системі дорівнює $V_1 = V_7 = 0,0314$ м³/с.

Для значень $P_1 = 5,5$ атм та $P_1 = 4,5$ атм ці параметри показано на рис. 2.12 та 2.13 відповідно.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	(P1=6,5 атм)												
2	№	ξ	d	Вихідні дані		Комплекс констант							
3	1	2,4	0,08	P1	658612,5	α1	57050996		α23	α456	α23456	α123456	
4	2	4,6	0,065	P2	344505	α2	250909059		4,4E+08	4,1E+08	1,07E+08	1,64E+08	
5	3	3,5	0,065	p	1200	α3	190909067						
6	4	3,5	0,04			α4	1331189906						
7	5	6,5	0,035			α5	4217480819						
8	6	4,0	0,02			α6	2,4342E+10						
9	7	5,0	0,075			α7	153863954						
10													

Рис. 2.10. Розрахунок коефіцієнтів місцевих опорів

=E3-P3-M4*P4^2		N		O	P
=P3-E4-H9*P5^2		Система рівнянь		Змінні	
=P4-P5		658612,5		PB	
		-344505		V1	
		0		V7	

Рис. 2.11. Запис системи рівнянь

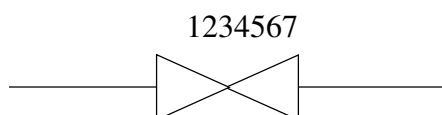
(P1=5,5 atm)														
№	ξ	d	Вихідні дані		Комплекс констант					Система рівнянь		Змінні		
1	2,4	0,08	P1	557287,5	α1	57050996	α23	α456	α23456	α123456	0,017989571	PB	447571,14	
2	4,6	0,065	P2	344505	α2	250909059	4,4E+08	4,1E+08	1,07E+08	1,64E+08	0,016899177	V1	0,02588	
3	3,5	0,065	p	1200	α3	190909067					0	V7	0,02588	
4	3,5	0,04			α4	1331189906								
5	6,5	0,035			α5	4217480819								
6	4,0	0,02			α6	2,4342E+10								
7	5,0	0,075			α7	153863954								

Рис. 2.12. Розрахунок для вхідного тиску P1 = 5,5 атм

(P1=4,5 atm)														
№	ξ	d	Вихідні дані		Комплекс констант					Система рівнянь		Змінні		
1	2,4	0,08	P1	455962,5	α1	57050996	α23	α456	α23456	α123456	-0,195844434	PB	398492,02	
2	4,6	0,065	P2	344505	α2	250909059	4,4E+08	4,1E+08	1,07E+08	1,64E+08	-0,183973739	V1	0,01873	
3	3,5	0,065	p	1200	α3	190909067					0,00000	V7	0,01873	
4	3,5	0,04			α4	1331189906								
5	6,5	0,035			α5	4217480819								
6	4,0	0,02			α6	2,4342E+10								
7	5,0	0,075			α7	153863954								

Рис. 2.13. Розрахунок для вхідного тиску P1 = 4,5 атм

Для побудови залежності $P1 = f(V7)$ максимально спрощуємо досліджувану схему:



Математичний опис спрощеної системи буде мати вигляд рівняння:

$$P1 - P2 = \alpha_{1234567} \cdot V7^2,$$

де $\alpha_{1234567}$ розраховується за схемою:

$$\begin{aligned} \alpha_{23} &= \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_{456} &= \frac{1}{(1/\sqrt{\alpha_4} + 1/\sqrt{\alpha_5} + 1/\sqrt{\alpha_6})^2} \\ \alpha_{23456} &= \frac{1}{(1/\sqrt{\alpha_{23}} + 1/\sqrt{\alpha_{456}})^2} \\ \alpha_{1234567} &= \alpha_1 + \alpha_{23456} + \alpha_7. \end{aligned}$$

Якщо всі операції виконані правильно, то і витрата рідини в системі буде такою, як і за обчислюванням за попередньою схемою (рис. 2.14).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	(P1=6,5 atm)															
2	№	ξ	d	Вихідні дані	Комплекс констант						Система рівнянь		Значення			
3	1	2,4	0,08	P1 658612,5	α1	37050996	α23	α456	α23456	α1234567	-0,228173768	V7	0,0314			
4	2	4,6	0,065	P2 344505	α2	2,51E+08	4,42E+08	4,13E+08	1,07E+08	3,18E+08						
5	3	3,3	0,065	p 1200	α3	1,91E+08										
6	4	3,5	0,04		α4	1,33E+09										
7	5	6,3	0,035		α5	4,22E+09										
8	6	4,0	0,02		α6	2,43E+10										
9	7	3,0	0,075		α7	1,54E+08										
10																
11																
12	(P1=5,5 atm)															
13	№	ξ	d	Вихідні дані	Комплекс констант						Система рівнянь		Значення			
14	1	2,4	0,08	P1 557287,5	α1	37050996	α23	α456	α23456	α1234567	0,008332802	V7	0,02388			
15	2	4,6	0,065	P2 344505	α2	2,51E+08	4,42E+08	4,13E+08	1,07E+08	3,18E+08						
16	3	3,3	0,065	p 1200	α3	1,91E+08										
17	4	3,5	0,04		α4	1,33E+09										
18	5	6,3	0,035		α5	4,22E+09										
19	6	4,0	0,02		α6	2,43E+10										
20	7	3,0	0,075		α7	1,54E+08										
21																
22																
23	(P1=4,5 atm)															
24	№	ξ	d	Вихідні дані	Комплекс констант						Система рівнянь		Значення			
25	1	2,4	0,08	P1 455962,5	α1	37050996	α23	α456	α23456	α1234567	-0,081502088	V7	0,01873			
26	2	4,6	0,065	P2 344505	α2	2,51E+08	4,42E+08	4,13E+08	1,07E+08	3,18E+08						
27	3	3,3	0,065	p 1200	α3	1,91E+08										
28	4	3,5	0,04		α4	1,33E+09										
29	5	6,3	0,035		α5	4,22E+09										
30	6	4,0	0,02		α6	2,43E+10										
31	7	3,0	0,075		α7	1,54E+08										
32																

Рис. 2.14. Отримання даних для побудови залежності $P1 = f(V7)$

Побудуємо графік залежності витрати рідини від зміни тиску на вході в систему (рис. 2.15):

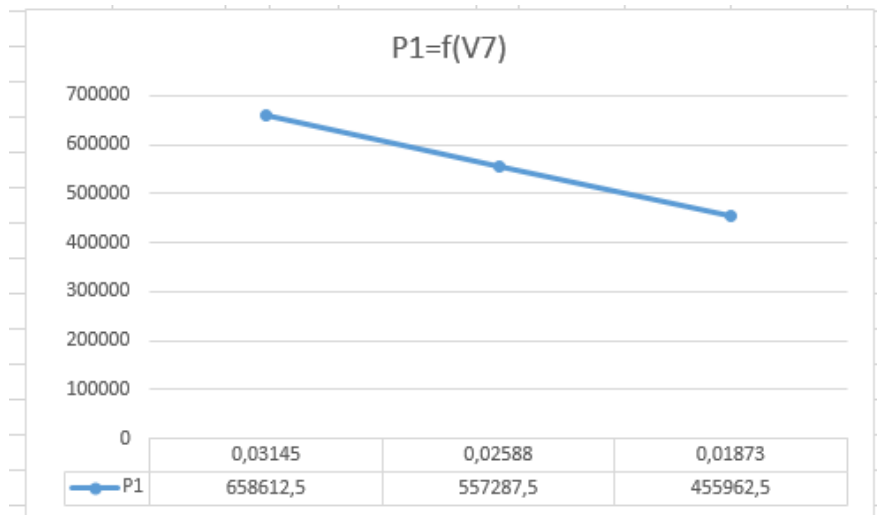


Рис. 2.15. Графік залежності витрати рідини від зміни тиску на вході в систему

Як видно з графіка, збільшення вхідного тиску приводить до збільшення витрати в системі.

Приклад 2.3. Визначити тиск і витрату рідини на кожній ділянці гідравлічної системи (рис. 2.16). Визначити витрату рідини в системі в цілому, застосовуючи метод редукції.

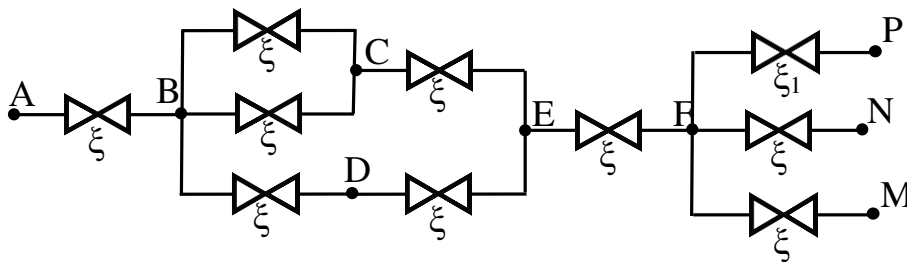


Рис. 2.16. Розгалужена гідравлічна система (до прикладу 2.3)

Вихідні дані для розрахунку:

- перекачується рідина густиною 1000 кг/м^3 ;
- тиск у мережі, атм: $P_A = 5$, $P_P = 1,5$, $P_N = 1$; $P_M = 2$;
- коефіцієнти локальних опорів на ділянках і діаметри перерізу ділянок наведені в табл. 2.3.

Таблиця 2.3

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ξ	1	5	3	4	7	4	12	15	17	15
d, м	0,08	0,04	0,04	0,05	0,05	0,06	0,1	0,03	0,04	0,03

Розв'язання із застосуванням MS Excel.

Складаємо математичний опис гідравлічної системи, який містить 10 рівнянь Бернуллі для кожної окремої ділянки і п'ять рівнянь матеріального балансу:

$$P_A - P_B = \alpha_1 \cdot V1^2$$

$$P_B - P_C = \alpha_2 \cdot V2^2$$

$$P_B - P_C = \alpha_3 \cdot V3^2$$

$$P_B - P_D = \alpha_4 \cdot V4^2$$

$$P_C - P_E = \alpha_5 \cdot V5^2$$

$$P_D - P_E = \alpha_6 \cdot V6^2$$

$$P_E - P_F = \alpha_7 \cdot V7^2$$

$$P_F - P_M = \alpha_8 \cdot V8^2$$

$$P_F - P_N = \alpha_9 \cdot V9^2$$

$$P_F - P_P = \alpha_{10} \cdot V10^2$$

$$V1 = V8 + V9 + V10$$

$$V1 = V2 + V3 + V4$$

$$V5 = V2 + V3$$

$$V4 = V6$$

$$V7 = V8 + V9 + V10$$

Розраховуємо для кожної ділянки значення коефіцієнтів α_i (рис. 2.17) і далі переходимо до запису рівнянь математичної моделі у робоче поле MS Excel, враховуючи вимоги оформлення щодо застосування опції «Пошук рішення» (рис. 2.18). Вводимо рівняння, прирівнюючи їх до 0, наприклад, для першої ділянки:

$$P_A - P_B - \alpha_1 \cdot V1^2 = 0,$$

тобто вигляд у MS Excel:

=C13-L1-F1*L6^2

=C2*((C\$17*8)/(8,314^2*B2^4))						
	A	B	C	D	E	F
1		d	ξ		α_1	2825595,55
2	1	0,08	1		α_2	226047644,39
3	2	0,04	5		α_3	135628586,63
4	3	0,04	3		α_4	74071292,11
5	4	0,05	4		α_5	129624761,20
6	5	0,05	7		α_6	35721109,24
7	6	0,06	4		α_7	13888367,27
8	7	0,1	12		α_8	2143266554,23
9	8	0,03	15		α_9	768561990,93
10	9	0,04	17		α_{10}	2143266554,23
11	10	0,03	15			
12						
13		P_A	506625			
14		P_M	202650			
15		P_N	101325			
16		P_P	151987,5			
17		ρ	1000			

Рис. 2.17. Обчислення значення коефіцієнтів α_i у MS Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		d	ξ		α_1	2825595,55		1	506625		P_B	
2	1	0,08	1		α_2	226047644,39		2	0		P_C	
3	2	0,04	5		α_3	135628586,63		3	0		P_D	
4	3	0,04	3		α_4	74071292,11		4	0		P_E	
5	4	0,05	4		α_5	129624761,20		5	0		P_F	
6	5	0,05	7		α_6	35721109,24		6	0		V_1	
7	6	0,06	4		α_7	13888367,27		7	0		V_2	
8	7	0,1	12		α_8	2143266554,23		8	-202650		V_3	
9	8	0,03	15		α_9	768561990,93		9	-101325		V_4	
10	9	0,04	17		α_{10}	2143266554,23		10	-151987,5		V_5	
11	10	0,03	15					11	0		V_6	
12								12	0		V_7	
13		P_A	506625					13	0		V_8	
14		P_M	202650					14	0		V_9	
15		P_N	101325					15	0		V_{10}	
16		P_P	151987,5									
17		ρ	1000									

Рис. 2.18. Визначення значень невідомих параметрів математичної моделі за допомогою «Пошук рішення»

Як видно з рис. 2.18, рішення не отримано, тобто можливості розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь у MS Excel у цей спосіб обмежені. Скористаємося для отримання результату засобами Mathcad 14.

Вводимо вихідні дані й обчислюємо константи α_i (рис. 2.19):

Origin := 1
i := 1..7

$$\xi := \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 4 \\ 12 \\ 15 \\ 17 \\ 15 \end{pmatrix} \quad d := \begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.04 \\ 0.04 \\ 0.05 \\ 0.05 \\ 0.06 \\ 0.1 \\ 0.03 \\ 0.04 \\ 0.03 \end{pmatrix}$$

$PA := 5 \cdot 101325 = 5.066 \times 10^5$
 $PM := 2 \cdot 101325 = 2.026 \times 10^5$
 $PN := 101325 = 1.013 \times 10^5$
 $PP := 1.5 \cdot 101325 = 1.52 \times 10^5$
 $p := 1000$

$$a := \frac{\xi \cdot p}{2 \cdot [0.25 - 3.14 \cdot (d)^2]} =$$

	1
1	$9.952 \cdot 10^4$
2	$1.99 \cdot 10^6$
3	$1.194 \cdot 10^6$
4	$1.019 \cdot 10^6$
5	$1.783 \cdot 10^6$
6	$7.077 \cdot 10^5$
7	$7.643 \cdot 10^5$
8	$1.062 \cdot 10^7$
9	$6.768 \cdot 10^6$
10	$1.062 \cdot 10^7$

Рис. 2.19. Обчислення значення коефіцієнтів α_i Mathcad 14

Систему рівнянь математичної моделі розв'язуємо за допомогою обчислювального блоку *Given-Find*, для застосування якого необхідно задати початкові наближення, виходячи з того, що значення тиску в проміжних точках гідравлічної системи можна прийняти у межах зовнішнього тиску, а витрати рідини на окремих ділянках визначити приблизно:

$$\begin{aligned}
 PB &:= 4.9 \cdot 101325 = 4.965 \times 10^5 \\
 PC &:= 4.4 \cdot 101325 = 4.458 \times 10^5 \\
 PD &:= 4.6 \cdot 101325 = 4.661 \times 10^5 \\
 PE &:= 2.8 \cdot 101325 = 2.837 \times 10^5 \\
 PF &:= 2.5 \cdot 101325 = 2.533 \times 10^5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V1 &:= \sqrt{\frac{PA - PB}{a_1}} = 0.319 & V3 &:= \sqrt{\frac{PB - PC}{a_3}} = 0.206 & V5 &:= \sqrt{\frac{PC - PE}{a_5}} = 0.302 \\
V2 &:= \sqrt{\frac{PB - PC}{a_2}} = 0.16 & V4 &:= \sqrt{\frac{PB - PD}{a_4}} = 0.173 & V6 &:= \sqrt{\frac{PD - PE}{a_6}} = 0.508 \\
V7 &:= \sqrt{\frac{PE - PF}{a_7}} = 0.199 & V9 &:= \sqrt{\frac{PF - PN}{a_9}} = 0.15 \\
V8 &:= \sqrt{\frac{PF - PM}{a_8}} = 0.069 & V10 &:= \sqrt{\frac{PF - PP}{a_{10}}} = 0.098
\end{aligned}$$

Далі оформлюємо обчислювальний блок:

Given

$$\begin{aligned}
PA - PB &= a_1 \cdot V1^2 & PD - PE &= a_6 \cdot V6^2 \\
PB - PC &= a_2 \cdot V2^2 & V1 &= V8 + V9 + V10 & PE - PF &= a_7 \cdot V7^2 \\
PB - PC &= a_3 \cdot V3^2 & V1 &= V2 + V3 + V4 & PF - PM &= a_8 \cdot V8^2 \\
PB - PD &= a_4 \cdot V4^2 & V2 + V3 &= V5 & PF - PN &= a_9 \cdot V9^2 \\
PC - PE &= a_5 \cdot V5^2 & V4 &= V6 & PF - PP &= a_{10} \cdot V10^2 \\
PC - PE &= a_5 \cdot V5^2 & V7 &= V8 + V9 + V10
\end{aligned}$$

$z := \text{Find}(PB, PC, PD, PE, PF, V1, V2, V3, V4, V5, V6, V7, V8, V9, V10)$

і виводимо результати розрахунку у вигляді стовпчика значень параметрів, що відповідають послідовності їх запису і *Find*:

	1
1	$4.916 \cdot 10^5$
2	$4.788 \cdot 10^5$
3	$4.485 \cdot 10^5$
4	$4.187 \cdot 10^5$
5	$3.03 \cdot 10^5$
6	0.389
7	0.08
8	0.103
9	0.205
10	0.184
11	0.205
12	0.389
13	0.097
14	0.173
15	0.119

За отриманим розрахунком бачимо, що загальна витрата рідини у системі $V1 = 0,389 \text{ м}^3/\text{с}$.

Метод редукції полягає у заміні складного об'єкта його спрощеною схемою. Для визначення загальної витрати рідини не потрібна інформація про внутрішній стан гідравлічної системи, тому максимально її спрощуємо. Етапи спрощування надано на рис. 2.20. Як видно з рис. 2.20, математична модель спрощеної системи буде складатись з чотирьох рівнянь Бернуллі й одного рівняння матеріального балансу:

$$PA - PF = \alpha_{1234567} \cdot V1^2$$

$$PF - PM = \alpha_8 \cdot V8^2$$

$$PF - PN = \alpha_9 \cdot V9^2$$

$$PF - PP = \alpha_{10} \cdot V10^2$$

$$V1 = V8 + V9 + V10$$

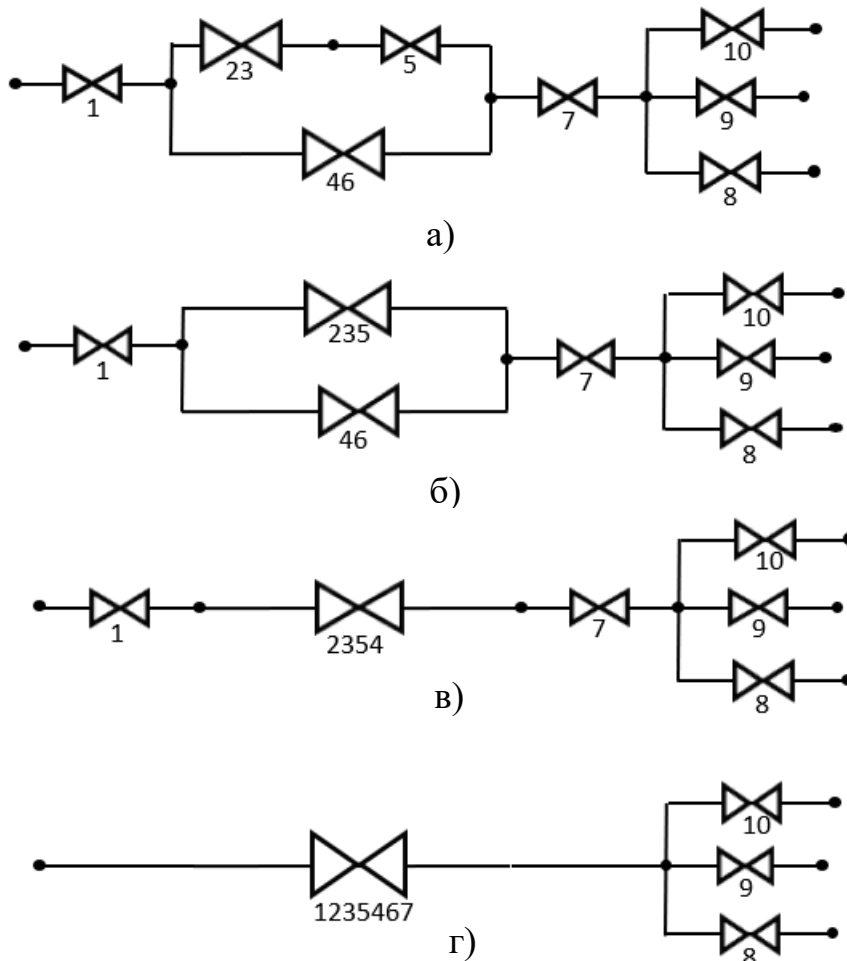


Рис. 2.20. Етапи спрощування розвинутої гідравлічної схеми:
а) 1; б) 2; в) 3; г) 4

Проводимо розрахунок еквівалентних коефіцієнтів α за відповідними формулами:

$$\begin{aligned}\alpha_{1235467} &= \alpha_1 + \alpha_{23546} + \alpha_7 \\ \alpha_{23546} &= \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_{235}}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_{46}}}\right)^2} \\ \alpha_{235} &= \alpha_{23} + \alpha_5 \\ \alpha_{46} &= \alpha_4 + \alpha_6 \\ \alpha_{23} &= \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_3}}\right)^2}\end{aligned}$$

Обчислення у Mathcad 14 починаємо у зворотній послідовності:

$$\begin{aligned}a_{23} &:= \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}}\right)^2} = 3.792 \times 10^5 \\ a_{46} &:= a_4 + a_6 = 1.727 \times 10^6 \\ a_{235} &:= a_{23} + a_5 = 2.163 \times 10^6 \\ a_{23546} &:= \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{a_{46}}} + \frac{1}{\sqrt{a_{235}}}\right)^2} = 4.816 \times 10^5 \\ a_{1235467} &:= a_1 + a_{23546} + a_7 = 1.345 \times 10^6\end{aligned}$$

Вводимо початкові наближення для невідомих параметрів нової системи:

$$\begin{aligned}PF &:= 3.5 \cdot 10^{1325} = 3.546 \times 10^5 \\ V1 &:= \sqrt{\frac{PA - PF}{a_{1235467}}} = 0.336 \\ V8 &:= \sqrt{\frac{PF - PM}{a_8}} = 0.12 \\ V9 &:= \sqrt{\frac{PF - PN}{a_9}} = 0.193 \\ V10 &:= \sqrt{\frac{PF - PP}{a_{10}}} = 0.138\end{aligned}$$

і застосовуємо обчислювальний блок:

$$\begin{aligned} \text{Given} \\ PA - PF &= a_{1235467} \cdot V1^2 \\ PF - PM &= a_8 \cdot V8^2 \\ PF - PN &= a_9 \cdot V9^2 \\ PF - PP &= a_{10} \cdot V10^2 \\ V1 &= V8 + V9 + V10 \\ z &:= \text{Find}(PF, V1, V8, V9, V10) = \begin{pmatrix} 3.03 \times 10^5 \\ 0.389 \\ 0.097 \\ 0.173 \\ 0.119 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Результати розрахунку, за якими загальна витрата рідини $V1$ аналогічна розрахованій за розгалуженим варіантом гідравлічної системи, доводить ефективність використання методу редукції.

Питання для самоконтролю

1. Які рівняння є основою для опису руху однорідного потоку?
2. Який процес описується рівнянням Ейлера?
3. Запишіть рівняння Бернуллі для реальної рідини.
4. За рахунок чого виникають втрати тиску на ділянках трубопроводів?
5. Як визначити втрати тиску в трубопроводах за наявності гідравлічних опорів?
6. Які об'єкти трубопроводів володіють гідравлічним опором?
7. Як розрахувати коефіцієнт тертя?
8. Від яких параметрів залежить пропускна спроможність прямолінійної ділянки?
9. У чому полягає метод редукції під час аналізу розгалуженої гідравлічної системи?
10. Як визначається еквівалентна пропускна спроможність за паралельного і послідовного з'єднання об'єктів?
11. Запишіть властивості знакової функції $sign(x)$, вживаної за розрахунків векторних величин.
12. Які рівняння називають алгеброю нелінійними?

13. Назвіть методи вирішення нелінійних рівнянь.
14. Поясніть суть методу простій ітерації.
15. Розкрийте геометричний сенс ітераційного процесу.
16. У чому відмінність методу Зейделя від методу простій ітерації?
17. Як вирішуються нелінійні рівняння в *MathCad*?
18. Запишіть структуру вирішального блоку для рівнянь і системи рівнянь.
19. Порівняйте функції *Find* і *Minner*, що використовуються для розв'язання рівнянь.

3. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРАВЛІЧНОЇ СИСТЕМИ З ЖИВИЛЬНОЮ ЄМНІСТЮ

Розглянемо ємність, у яку надходить потік через установлений на вході вентиль фз системи з тиском P_1 (рис. 3.1).

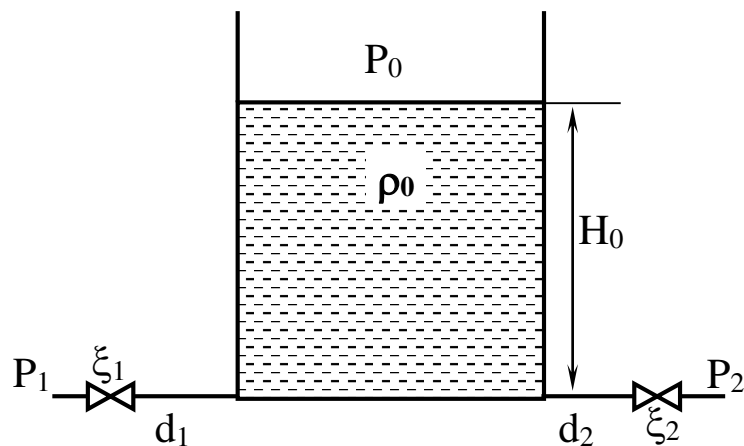


Рис. 3.1. Гідравлічна система з живильною ємністю

Тиск після вхідного вентиля рівний P_1' і залежить від рівня рідини в баку H і абсолютного тиску P_0 . Рідина, що витікає, проходить через установлений на відповідному трубопроводі вентиль, тиск після якого рівний P_2' .

На вхідний і вихідний потоки впливає зміна рівня рідини H у ємності, тому взаємопов'язані витрати, так само, як і рівень, стають залежними змінними, тоді як незалежними змінними (окрім часу) залишаються лише тиск P_0 , P_1 і P_2 . Усього в цій системі є п'ять залежних величин: V_1 , V_2 , H , P_1' і P_2' . Для їх знаходження необхідно скласти п'ять рівнянь.

3.1. Складання математичного опису живильного резервуара

Основним рівнянням, яке покладено в основу математичної моделі цієї гідравлічної системи, є рівняння матеріального балансу ємності — рівняння зміни об'єму в часі, який визначається різницею між швидкістю подачі і відведення рідини:

$$S \frac{dH}{dt} = V_1 - V_2 \quad (3.1)$$

До нього додаються два рівняння витрати через вхідний і вихідний вентиля (див. співвідношення 2.9):

$$V1 = \sqrt{\frac{|P1-P1'|}{\alpha1}} \cdot \text{sign}(P1 - P1') \quad (3.2)$$

$$V2 = \sqrt{\frac{|P2-P2'|}{\alpha2}} \cdot \text{sign}(P2' - P2) \quad (3.3)$$

Четверте і п'яте рівняння виражають зв'язок внутрішнього тиску і рівнем рідини в ємності:

$$P1' = \begin{cases} P0 + \rho g(H - h1), H \geq h1 \\ P0, H < h1 \end{cases} \quad (3.4)$$

$$P2' = \begin{cases} P0 + \rho g(H - h2), H \geq h2 \\ P0, H < h2 \end{cases} \quad (3.5)$$

У результаті остаточне рівняння, що характеризує роботу ємності, набуде вигляду:

$$S \frac{dH}{dt} = \sqrt{\frac{|P1-P1'|}{\alpha1}} \cdot \text{sign}(P1 - P1'(H)) - \sqrt{\frac{|P2-P2'|}{\alpha2}} \cdot \text{sign}(P2'(H) - P2) \quad (3.6)$$

Це диференціальне рівняння, для розв'язання якого необхідно задати початкові умови. У нашому випадку ці умови визначаються рівнем рідини в баку в початковий момент часу:

$$H(0) = H0 \quad (3.7)$$

Співвідношення (3.1) – (3.7) визначають математичну модель гідравлічної ємності. Основною невідомою тут обрано рівень рідини в баку. Визначивши це значення у кожен момент часу, можна розрахувати тиск у кожній внутрішній точці ємності, витрати рідини в трубопроводі, режими течії рідини тощо. Побудована модель має такі параметри:

- 1) геометричні параметри ємності: $S, h1, d1, d2$;
- 2) фізичні властивості рідини: ρ і μ ;
- 3) технологічні параметри: $P1, P2, P0, \xi_i$.

3.2. Розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку числовими методами

Числовий метод Ейлера

Геометричне значення цього методу полягає в апроксимації розв'язання рівняння на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ відрізком дотичної, проведеної до графіка рішення в точці x_i . Тобто можна записати:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

де a і b — межі зміни величини x ; h — відстань між вузлами (крок сітки); N — ціле число відрізків розбиття; $y(x_i)$ — значення точного рішення; y_i — відповідне наближене значення, побудованого за допомогою числового методу.

Отже:

$$\begin{aligned}x_i &= a + i \cdot h, \\y_{i+1} &= y_i + h \cdot f(x_i, y_i),\end{aligned}$$

де $i = 0 \dots N$.

Метод Ейлера дуже простий для реалізації на комп'ютері: на кроці i обчислюється значення, яке потім підставляється у вираз:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

Метод Рунге-Кутта

Для розв'язання диференціальних рівнянь методом Рунге-Кутта Mathcad має низку вбудованих функцій. Функція *rkfixed* реалізує метод Рунге-Кутта четвертого порядку з фіксованим кроком. Фактично ця функція призначена для розв'язання систем диференціальних рівнянь першого порядку.

Розв'язки під час використання функції *rkfixed* ($x, y1, y2, N, D$) зображуються у вигляді матриці. Перший стовпець цієї матриці містить точки, в яких отримано розв'язок; інші стовпчики — безпосередньо сам розв'язок і його перші $n-1$ похідні.

Аргументи функції:

x — вектор початкових значень (n елементів);

$y1, y2$ — межі інтервалу, на якому йде пошук розв'язків диференціального рівняння;

N — число точок усередині інтервалу ($y1, y2$), в яких іде пошук розв'язків рішення;

D — вектор, що складається з n елементів, який містить перші похідні шуканої функції.

Коли розв'язується одне диференційне рівняння $y' = xy$, $x_{min} = 0$, $x_{max} = 1$, $N = 10$, матриця x містить тільки один елемент. Проте запис має бути, наприклад, не $x := 1$, а $x[0] = 1$, тобто необхідно указувати на те, що величина x — матриця, а отже, необхідно використовувати індексне позначення. Матриця похідних складається також з одного елемента. Цей елемент співпадає з правою частиною початкового диференційного рівняння $D(x,y) := y[0]x$. Для розв'язання звичайного диференційного рівняння (ЗДУ) використовується функція `odesolve(x, b, step)`, яка реалізує метод Рунге-Кутта. Процес розв'язання звичайного диференційного рівняння (*ordinary differential equation* — *ODE*) проходить в обчислюваному блоці.

Для розв'язання ЗДУ, розв'язаних відносно старшої похідної, використовується блок *Given-Find* разом з функцією `odesolve`. ЗДУ сукупно з початковими і межевими умовами записують у блоці *Given-Find*. Похідну можна позначати як штрихами (Ctrl + F7), так і за допомогою знака похідної d/dx . Приклад використання функції наведений нижче.

Функція `odesolve` має три аргументи:

- ✓ перший — незалежна змінна;
- ✓ другий — межі інтервалу, в якому шукають розв'язки;
- ✓ третій — крок, з яким шукають розв'язки.

3.3. Приклади розв'язування завдань

Приклад 3.1. Задано циліндричний бак з діаметром підстави D . По трубопроводу діаметром d_1 до нього подається рідина з відносною густиною $\rho_{\text{відн}}$. З бака в гідросистему рідина надходить по вихідному трубопроводу діаметром d_2 . На вхідному трубопроводі встановлений вентиль з коефіцієнтом опору ξ_1 на вихідному — вентиль з коефіцієнтом опору ξ_2 . Тиск на вході в трубопроводі — P_1 , на виході з трубопроводу — P_2 , початковий рівень рідини H_0 , абсолютний тиск у баку — P_0 (рис. 3.2).

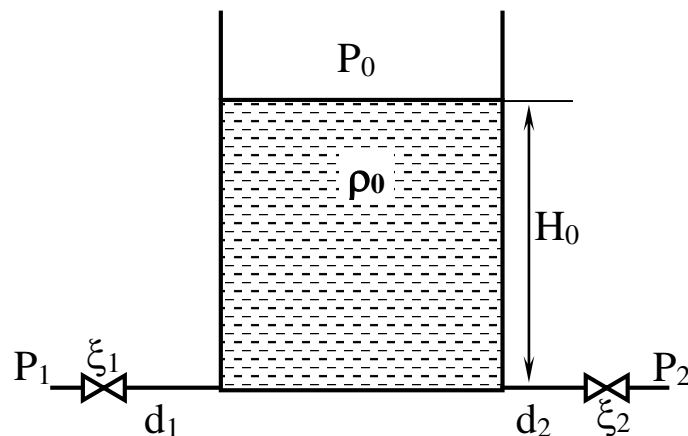


Рис. 3.2. Схема гідравлічної системи з живильною ємністю до прикладу 3.1

Необхідно побудувати математичну модель роботи гідравлічної системи з живильною ємністю; за допомогою цієї моделі досліджувати вплив коефіцієнта місцевого опору α_2 на кількість рідини в ємності з часом. Фізичні параметри системи наведено в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

D (м)	$\rho_{\text{відн}}$	ξ_1	ξ_2	d1, мм	d2, мм	P1, атм	P2, атм	P0, мм рт. ст.	H0 (м)
2	1,4	2,2	3,5	90	25	5	3,3	760	3,1

Розв'язання з використанням Mathcad 14. Попередньо необхідно ввести початкові дані. Числові значення фізичних величин мають бути введені в одиницях виміру системи СІ:

$$\begin{aligned}
 D &:= 3 & d1 &:= 0.09 \\
 \rho &:= 1400 & d2 &:= 0.025 \\
 g &:= 9.8 & P0 &:= 0.98 \cdot 10^5 \\
 H0 &:= 3.1 & P1 &:= 5 \cdot 10^5 \\
 \xi_1 &:= 2.2 & P2 &:= 3.3 \cdot 10^5 \\
 \xi_2 &:= 3.5
 \end{aligned}$$

Далі необхідно виконати розрахунок параметра α на входному і вихідному трубопроводах за відповідними формулами і врахувати, що α на ділянці 2 може набувати кількох значень:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &:= \frac{\xi_1 \cdot \rho}{2 \cdot (0.25 \cdot \pi \cdot d1^2)^2} \\
 \alpha_2(\xi_2) &:= \frac{\xi_2 \cdot \rho}{2 \cdot (0.25 \cdot \pi \cdot d1^2)^2}
 \end{aligned}$$

Площу перерізу ємності розраховуємо за відомою формулою:

$$S := \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$S = 7.069$$

Тиск у внутрішніх точках ємності на вході і виході згідно з умовами задачі розраховується однозначно за виразами:

$$P_{12}(V) := P_0 + \rho \cdot \frac{V}{S} \cdot g$$

$$P_{21}(V) := P_0 + \rho \cdot g \cdot \frac{V}{S}$$

Витрату у вхідній і вихідній ділянках розраховуємо за формулами:

$$V_1(V) := \sqrt{\frac{|P_{12}(V) - P_1|}{\alpha_1}} \cdot \text{sign}(P_{12}(V) - P_1)$$

$$V_2(V, \xi_2) := \sqrt{\frac{|P_{12}(V) - P_1|}{\alpha_2(\xi_2)}} \cdot \text{sign}(P_2 - P_{21}(V))$$

Початковий об'єм рідини в ємності буде:

$$V_{10} := S \cdot H_0$$

$$V_{10} = 21.913$$

Зміну витрати рідині в ємності виразимо через функцію:

$$f(V, \xi_2) := V_1(V) - V_2(V, \xi_2)$$

Для вирішення цього рівняння застосуємо числовий метод Ейлера. Задаємо крок h , число кроків N .

$$h := 0.1$$

$$N := 100$$

$$i := 0..N - 1$$

Уведемо початкові значення змінних:

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ V1_0 \\ V2_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ V10 \\ V10 \end{pmatrix}$$

Визначимо порядок розрахунку подальших точок за значень, наприклад, ξ_2 0,009 і 5000, тобто за різних положень вентиля на вихідному трубопроводі:

$$\begin{pmatrix} t_{i+1} \\ V1_{i+1} \\ V2_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t_i + h \\ V1_i + h \cdot f(V1_i, 0.009) \\ V2_i + h \cdot f(V2_i, 5000) \end{pmatrix}$$

Результати розрахунку наведемо у вигляді графіка (рис. 3.3).

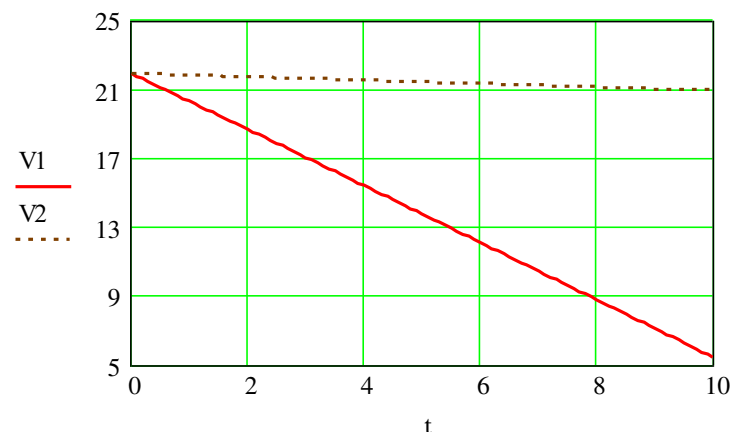


Рис. 3.3. Залежність об'єму рідини в часі від значення коефіцієнта ξ_2 (до прикладу 3.1)

З графіка видно, що у разі закритого вентиля ($\xi_2 = 5000$) рівень рідини практично не змінюється, у разі відкритого вентиля рідина з ємності витікає і її кількість зменшується.

Приклад 3.2. Задана циліндрична ємність діаметром D . Через трубопровід діаметром $d1$ у цю ємність надходить рідина з відносною густиною $\rho_{\text{від}}$. З резервуара в гідравлічну систему рідина надходить по вихідному трубопроводу діаметром $d2$. На вхідний трубопровід установлюється клапан з коефіцієнтом опору ξ_1 , на виході — клапан з коефіцієнтом опору ξ_2 . Тиск на вході — $P1$, у разі виходу з системи — $P2$, початковий рівень рідини $H0$. Атмосферний тиск — P_0 .

Необхідно побудувати математичну модель роботи гідравлічної системи з живильним баком і графік зміни об'єму рідини протягом часу за таких значень коефіцієнта ξ_2 — 10, 50, 100.

Розв'язання з використанням MS Excel. У робоче поле MS Excel запишемо вихідні дані:

	A	B	C	D	E
1	D	2			
2	$\rho_{от}$	1,4			
3	ξ_1	2,2			
4	ξ_2	3,5	10	50	100
5	d_1	0,09			
6	d_2	0,055			
7	P_1	506625			
8	P_2	101325			
9	P_0	99991,78			
10	H_0	3,1			
11	h_1	0,5			
12	h_2	0			

На початку розрахуємо абсолютну густину рідини: $\rho = \rho_{відн} \cdot \rho_{води} = 1,4 \cdot 1000 = 1400 \text{ кг/м}^3$. Об'єм рідини в циліндричній ємності визначається за формулою:

$$V_p = S \cdot H_0 = (\pi D^2/4) \cdot H_0 = 3,14 \cdot 3,1 = 9,734 \text{ л.}$$

Отже, початковий рівень рідини в резервуарі буде дорівнювати: $H = V_p/S = 9,734/3,14 = 3,1 \text{ м}$, а у часі буде змінюватися за формулою:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{V_1 - V_2}{S}$$

Перепад тиску на вхідному та вихідному трубопроводі визначаються за формулами відповідно:

$$\begin{aligned} P_1 - P_{11} &= \alpha_1 \cdot V_1^2 \cdot \text{sign}(V_1) \\ P_{22} - P_2 &= \alpha_2 \cdot V_2^2 \cdot \text{sign}(V_2) \end{aligned}$$

Витрати рідини на вході і виході визначаються за рівняннями:

$$\begin{aligned} V_1(H) &= \sqrt{\frac{|P_1 - P_{11}(H)|}{\alpha_1}} \cdot \text{sign}(P_1 - P_{11}(H)) \\ V_2(H) &= \sqrt{\frac{|P_{22}(H) - P_2|}{\alpha_2}} \cdot \text{sign}(P_{22}(H) - P_2) \end{aligned}$$

Значення тисків на вході в резервуар і виході з нього знаходяться в залежності від значень рівня рідини в резервуарі відповідно до рівняння гідростатики:

$$P_{11}(H) = \begin{cases} P_0 + \rho g(H - h_1), & H > h_1 \\ P_0, & H \leq h_1 \end{cases}$$

$$\text{sign}(P_1 - P_{11}) = \begin{cases} (P_1 - P_{11}) > 0, & 1; \\ (P_1 - P_{11}) = 0, & 0; \\ (P_1 - P_{11}) < 0, & -1 \end{cases}$$

$$P_{22}(H) = \begin{cases} P_0 + \rho g(H - h_2), & H > h_2 \\ P_0, & H \leq h_2 \end{cases}$$

$$\text{sign}(P_{22} - P_2) = \begin{cases} (P_{22} - P_2) > 0, & 1; \\ (P_{22} - P_2) = 0, & 0; \\ (P_{22} - P_2) < 0, & -1 \end{cases}$$

Алгоритм розрахунку для залежності зміни об'єму рідини у часі ($\xi_2 = 3,5$) наведено на рис. 3.4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	D	2	ρ	t	$V_{ж}$	S	H	V_1	V_2	P_{11}	P_{22}	α_1	α_2	sign ($P_1 - P_{11}$)	sign ($P_{22} - P_2$)	h
2	P_{01}	1,4	1400	0	9,734	3,14	3,1	0,098682	-0,021011	135700,2	142567,2	38090035	4,34E+08	1	-1	0,2
3	ξ_{11}	2,2		0,2	9,757939		3,107624	0,098668	-0,021005	135800,9	142671,1			1	-1	
4	ξ_{12}	3,5		0,4	9,781873		3,115246	0,098654	-0,020999	135909,6	142776,6			1	-1	
5	d_{11}	0,09		0,6	9,805804		3,122867	0,09864	-0,020994	136014,2	142881,2			1	-1	
6	d_{12}	0,055		0,8	9,829731		3,130487	0,098626	-0,020988	136118,9	142985,8			1	-1	
7	P_1	506625		1	9,853653		3,138106	0,098612	-0,020982	136223,5	143090,3			1	-1	
8	P_2	334372,5		1,2	9,877572		3,145724	0,098598	-0,020976	136328,1	143195,1			1	-1	
9	P_0	99991,78		1,4	9,901487		3,15334	0,098584	-0,020971	136432,7	143299,7			1	-1	
10	H_0	3,1		1,6	9,925398		3,160955	0,09857	-0,020965	136537,3	143404,3			1	-1	
11	h_1	0,5		1,8	9,949305		3,168569	0,098556	-0,020959	136641,9	143508,9			1	-1	
12	h_2	0		2	9,973208		3,176181	0,098543	-0,020953	136746,4	143613,4			1	-1	

=E2+(H2-I2)*P\$2

=E3/F\$2

=((ABS(B\$7-J2))/L\$2)^(1/2)*N2

=((ABS(K2-B\$8))/M\$2)^(1/2)*O2

=ЕСЛИ(G2>B\$11;B\$9+C\$2*9,81*(G2-B\$11);B\$9)

=ЕСЛИ(G2>B\$12;B\$9+C\$2*9,81*(G2-B\$12);B\$9)

=ЕСЛИ((B\$7-J2)>0;1;ЕСЛИ((B\$7-J2)=0;0;-1))

=ЕСЛИ((K2-B\$8)>0;1;ЕСЛИ((K2-B\$8)=0;0;-1))

Рис. 3.4. Алгоритм розрахунку кількості рідини (до прикладу 3.2)

Від’ємні значення витрати рідини на виході з бака вказують на те, що тиск на виході занадто високий і не дає рідині виходити з ємності. Тому необхідно зменшити, наприклад, до значення тиску $P_2 = 1$ атм. Тоді отримуємо результат, коли витікання рідини можливе (рис. 3.5):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	D	2	p	t	V _ж	S	H	V ₁	V ₂	P ₁₁	P ₂₂	α ₁	α ₂	sign (P ₁ -P ₁₁)	sign (P ₂₂ -P ₂)	h
2	P _{от}	1,4	1400	0	9,734	3,14	3,1	0,098682	0,0097428	135700,2	142567,2	38090035	4,34E+08	1	1	0,2
3	ξ ₁	2,2		0,2	9,751788		3,105665	0,098671	0,009752	135778	142645			1	1	
4	ξ ₂	3,5		0,4	9,769572		3,111329	0,098661	0,0097611	135855,8	142722,8			1	1	
5	d ₁	0,09		0,6	9,787352		3,116991	0,098651	0,0097703	135933,5	142800,5			1	1	
6	d ₂	0,055		0,8	9,805128		3,122652	0,09864	0,0097795	136011,3	142878,3			1	1	
7	P ₁	506625		1	9,8229		3,128312	0,09863	0,0097886	136089	142956			1	1	
8	P ₂	101325		1,2	9,840668		3,133971	0,09862	0,0097977	136166,7	143033,7			1	1	
9	P ₀	99991,78		1,4	9,858433		3,139628	0,098609	0,0098069	136244,4	143111,4			1	1	
10	H ₀	3,1		1,6	9,876193		3,145284	0,098599	0,009816	136322,1	143189,1			1	1	
11	h ₁	0,5		1,8	9,89395		3,150939	0,098589	0,0098251	136399,8	143266,8			1	1	
12	h ₂	0		2	9,911703		3,156593	0,098578	0,0098342	136477,4	143344,4			1	1	

Рис. 3.5. Алгоритм розрахунку (ξ₂ = 3,5) (до прикладу 3.2)

Для побудови залежності витрати рідини в баку в часі за різних положень вихідного вентиля аналогічно знаходимо залежність об’єму від часу для значення коефіцієнта опору ξ₂ = 10, 50, 100 (рис. 3.6-3.7).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	D	2	p	t	V _ж	S	H	V ₁	V ₂	P ₁₁	P ₂₂	α ₁	α ₂	sign (P ₁ -P ₁₁)	sign (P ₂₂ -P ₂)	h
2	P _{от}	1,4	1400	0	9,734	3,14	3,1	0,098682	0,0057639	135700,2	142567,2	38090035	1,24E+09	1	1	0,2
3	ξ ₁	2,2		0,2	9,752584		3,105918	0,098671	0,0057696	135781,5	142648,5			1	1	
4	ξ ₂	10		0,4	9,771164		3,111836	0,09866	0,0057753	135862,7	142729,7			1	1	
5	d ₁	0,09		0,6	9,789741		3,117752	0,098649	0,0057809	135944	142811			1	1	
6	d ₂	0,055		0,8	9,808315		3,123667	0,098639	0,0057866	136025,2	142892,2			1	1	
7	P ₁	506625		1	9,826885		3,129581	0,098628	0,0057922	136106,4	142973,4			1	1	
8	P ₂	101325		1,2	9,845452		3,135494	0,098617	0,0057979	136187,7	143054,7			1	1	
9	P ₀	99991,78		1,4	9,864016		3,141406	0,098606	0,0058035	136268,9	143135,9			1	1	
10	H ₀	3,1		1,6	9,882576		3,147317	0,098595	0,0058091	136350	143217			1	1	
11	h ₁	0,5		1,8	9,901134		3,153227	0,098585	0,0058148	136431,2	143298,2			1	1	
12	h ₂	0		2	9,919688		3,159136	0,098574	0,0058204	136512,4	143379,4			1	1	

Рис. 3.5. Алгоритм розрахунку (ξ₂ = 10) (до прикладу 3.2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	D	2	p	t	V _ж	S	H	V ₁	V ₂	P ₁₁	P ₂₂	α ₁	α ₂	sign (P ₁ -P ₁₁)	sign (P ₂₂ -P ₂)	h
2	P _{от}	1,4	1400	0	9,734	3,14	3,1	0,098682	0,0025777	135700,2	142567,2	38090035	6,21E+09	1	1	0,2
3	ξ ₁	2,2		0,2	9,753221		3,106121	0,098671	0,0025803	135784,2	142651,2			1	1	
4	ξ ₂	50		0,4	9,772439		3,112242	0,098659	0,0025829	135868,3	142735,3			1	1	
5	d ₁	0,09		0,6	9,791654		3,118361	0,098648	0,0025856	135952,3	142819,3			1	1	
6	d ₂	0,055		0,8	9,810867		3,12448	0,098637	0,0025882	136036,4	142903,4			1	1	
7	P ₁	506625		1	9,830077		3,130598	0,098626	0,0025908	136120,4	142987,4			1	1	
8	P ₂	101325		1,2	9,849284		3,136715	0,098615	0,0025934	136204,4	143071,4			1	1	
9	P ₀	99991,78		1,4	9,868488		3,142831	0,098604	0,002596	136288,4	143155,4			1	1	
10	H ₀	3,1		1,6	9,887689		3,148946	0,098592	0,0025986	136372,4	143239,4			1	1	
11	h ₁	0,5		1,8	9,906888		3,15506	0,098581	0,0026012	136456,4	143323,4			1	1	
12	h ₂	0		2	9,926084		3,161173	0,09857	0,0026038	136540,3	143407,3			1	1	

Рис. 3.6. Алгоритм розрахунку (ξ₂ = 50) (до прикладу 3.2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	D	2	ρ	t	$V_{ж}$	S	H	V_1	V_2	P_{11}	P_{22}	α_1	α_2	$\text{sign}(P_1 - P_{11})$	$\text{sign}(P_{22} - P_2)$	h
2	$P_{от}$	1,4	1400	0	9,734	3,14	3,1	0,098682	0,0018227	135700,2	142567,2	38090035	1,24E+10	1	1	0,2
3	ξ_1	2,2		0,2	9,753372		3,106169	0,098671	0,0018246	135784,9	142651,9			1	1	
4	ξ_2	100		0,4	9,772741		3,112338	0,098659	0,0018264	135869,6	142736,6			1	1	
5	d_1	0,09		0,6	9,792108		3,118506	0,098648	0,0018283	135954,3	142821,3			1	1	
6	d_2	0,055		0,8	9,811472		3,124672	0,098637	0,0018302	136039	142906			1	1	
7	P_1	506625		1	9,830833		3,130838	0,098625	0,001832	136123,7	142990,7			1	1	
8	P_2	101325		1,2	9,850192		3,137004	0,098614	0,0018339	136208,4	143075,4			1	1	
9	P_0	99991,78		1,4	9,869548		3,143168	0,098603	0,0018358	136293	143160			1	1	
10	H_0	3,1		1,6	9,888901		3,149332	0,098592	0,0018376	136377,7	143244,7			1	1	
11	h_1	0,5		1,8	9,908252		3,155494	0,09858	0,0018395	136462,3	143329,3			1	1	
12	h_2	0		2	9,9276		3,161656	0,098569	0,0018413	136547	143414			1	1	

Рис. 3.7. Алгоритм розрахунку ($\xi_2 = 100$) (до прикладу 3.2)

За розрахованими даними V_p будемо шуканий графік $V_p = f(\xi_2)$, який відображає реальну ситуацію, коли прикриття вихідного вентиля приводить до збільшення кількості рідини в ємності (рис. 3.8).

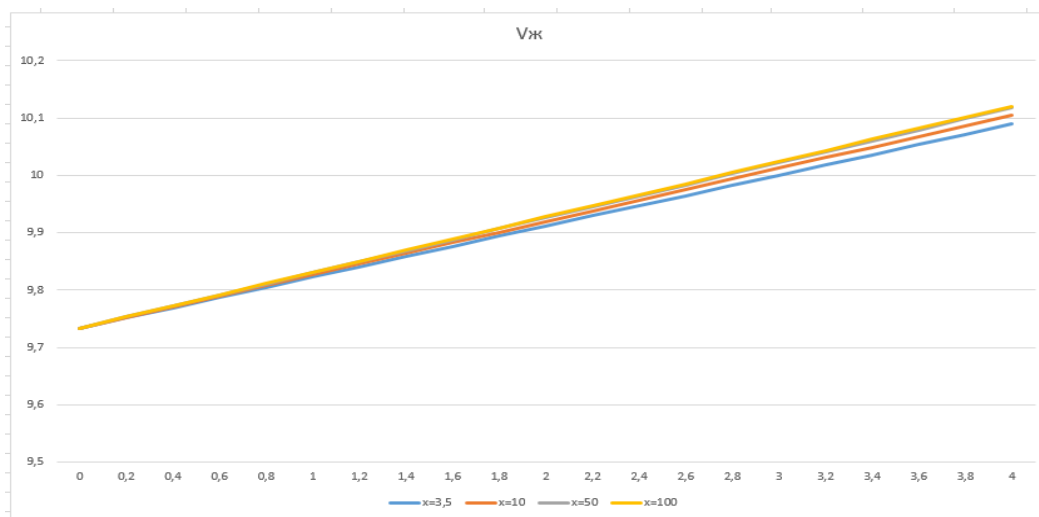


Рис. 3.8. Графічна залежність $V_p = f(\xi_2)$ (до прикладу 3.2)

Питання для самоконтролю

1. Запишіть основні параметри, зв'язок між якими необхідно установити під час моделювання гідроємності.
2. Запишіть рівняння, що зв'язують внутрішній тиск на вході і виході з трубопровода ємності з рівнянням рідини в ній.
3. Складіть математичну модель роботи гідравлічної ємності.
4. Запишіть алгоритм розв'язання диференційного рівняння методом Ейлера.
5. Запишіть алгоритм розв'язання диференційного рівняння методом Рунге-Кутта.
6. Який метод розв'язання диференційного рівняння реалізує функція *odesolve*?

4. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОСАДЖЕННЯ ЧАСТИНОК

Низка технологічних процесів пов'язана з рухом твердих тіл у краплинних рідинах або газах. До таких процесів належить осадження твердих частинок із суспензій під дією сили тяжіння.

Під час руху тіла в рідині виникають гідравлічні опори. Для подолання цього опору і забезпечення рівномірного руху тіла має бути витрачена певна енергія. Величина опору, що виникає, залежить переважно від режиму руху рідини і форми обтічного тіла.

4.1. Складання математичної моделі вільного осадження частинок

На частинку масою m , яка здійснює вільне падіння, діють сили:

- виштовхувальна сила (сила Архімеда F_a);
- сила тяжіння;
- сила опору (F_c) з боку середовища, в якому відбувається осадження.

У загальному випадку диференціальне рівняння вільного осадження може бути записане у вигляді:

$$m \frac{d\omega}{dt} = mg - F_a - F_c, \quad (4.1)$$

де ω — лінійна швидкість осадження.

Зі свого боку, виштовхувальна сила F_a визначається рівнянням:

$$F_a = m_c \cdot g, \quad (4.2)$$

де m_c — маса середовища, витиснена частинкою, що осідає.

Враховуючи, що масу середовища можна визначити через масу частинки:

$$m_c = m_{\text{ч}} \cdot \frac{\rho_{\text{сер.}}}{\rho_{\text{ч}}} \quad (4.3)$$

отримують вираз для визначення F_a :

$$F_a = m_{\text{ч}} \cdot g \cdot \frac{\rho_{\text{сер.}}}{\rho_{\text{ч}}} \quad (4.4)$$

Сила опору середовища розраховується за формулою:

$$F_c = \xi(\omega) \cdot S \cdot \frac{\rho_{\text{сеп}} \cdot \omega^2}{2}, \quad (4.5)$$

де S — площа поперечного перетину тіла, що осідає; $\xi(\omega)$ — коефіцієнт опору середовища, залежний від режиму течії рідини:

$$\xi = \begin{cases} \frac{24}{Re}, & Re \leq 1,9, \\ 0,44, & 1,9 < Re < 500, \\ \frac{18,5}{Re^{0,6}}, & Re \geq 500 \end{cases} \quad (4.6)$$

Зважаючи на залежності (4.4) і (4.5), можна перетворити рівняння (4.1) до вигляду:

$$m_{\text{ч}} \cdot \frac{d\omega}{dt} = m_{\text{ч}} \cdot g - m_{\text{ч}} \cdot g \cdot \frac{\rho_{\text{сеп}}}{\rho_{\text{ч}}} - \xi \cdot S \cdot \frac{\rho_{\text{сеп}} \cdot \omega^2}{2} \quad (4.7)$$

Цей вираз є диференціальним рівнянням з нелінійною правою частиною. Розділивши обидві його частини на масу частинки $m_{\text{ч}}$, отримують:

$$\frac{d\omega}{dt} = g \left(1 - \frac{\rho_{\text{сеп}}}{\rho_{\text{ч}}}\right) - \frac{\xi \cdot S \cdot \rho_{\text{сеп}} \cdot \omega^2}{2 \cdot m_{\text{ч}}} \quad (4.8)$$

Залежність (4.8) є рівнянням вільного осадження частинок, у якому складова $g \left(1 - \frac{\rho_{\text{сеп}}}{\rho_{\text{ч}}}\right)$ відповідає за зовнішню силу, що діє на осаджувану частинку, а складова $\frac{\xi \cdot S \cdot \rho_{\text{сеп}} \cdot \omega^2}{2 \cdot m_{\text{ч}}}$ відповідає за силу опору з боку середовища. Сила опору середовища пропорційна швидкості осадження і зростає у міру її збільшення.

За умови $\frac{d\omega}{dt} = 0$ сили опору зрівноважують сили тяжіння. У цьому випадку швидкість осадження ($\omega = \text{const}$) установлюється, тобто з цієї миті часу частинка рухається з постійною швидкістю осадження (рис. 4.1).

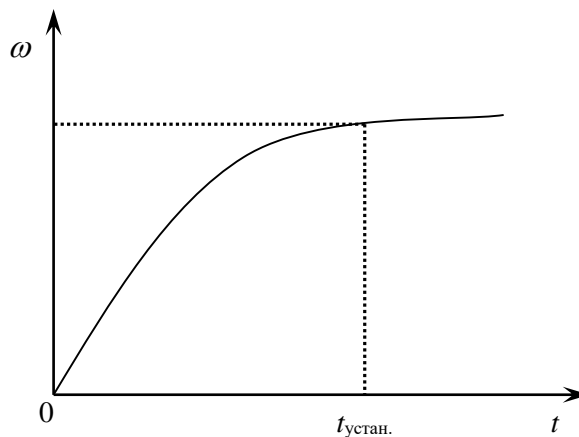


Рис. 4.1. Залежність швидкості осадження ω одиничної частинки від часу t

Якщо прийняти, що осідає частинка сферичної форми, то масу частинки визначають за виразом:

$$m_{\text{ч}} = V \cdot \rho_{\text{ч}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{d^3}{2^3} \cdot \rho_{\text{ч}} = \frac{\pi \cdot d^3}{6} \cdot \rho_{\text{ч}} \quad (4.9)$$

Після підстановки рівняння (4.9) у рівняння (4.8), а також урахуваючи, що площу перерізу сферичної частинки обчислюють за формулою $S = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$, отримують диференціальне рівняння вільного осадження сферичної частинки:

$$\frac{d\omega}{dt} = g \left(1 - \frac{\rho_{\text{сеп.}}}{\rho_{\text{ч}}} \right) - \frac{3 \cdot \xi \cdot \rho_{\text{сеп.}} \cdot \omega^2}{4 \cdot d \cdot \rho_{\text{ч}}} \quad (4.10)$$

Для розв'язання отриманого рівняння необхідно задати початкові умови: у початковий момент часу $t = 0$, початкова швидкість осадження $\omega = 0$.

Математична модель осадження сферичної частинки є диференціальним рівнянням першого порядку щодо швидкості осадження ω . Особливість цього рівняння — суттєва нелінійність правої частини стосовно основної невідомої величини. Це рівняння описує осадження сферичної частинки в будь-якому режимі, оскільки $\xi(\omega) = f(\text{Re})$.

Для аналізу процесу осадження сферичної частинки в ламінарному режимі перетворимо рівняння (4.10), враховуючи, що $\xi = \frac{24}{\text{Re}} \cdot \frac{\mu}{\rho \cdot \omega \cdot d}$. Отримаємо вираз:

$$\frac{d\omega}{dt} = g \cdot \left(1 - \frac{\rho_{\text{сеп.}}}{\rho_{\text{ч}}} \right) - \frac{3}{4} \cdot \frac{\rho_{\text{сеп.}} \cdot \omega^2}{d \cdot \rho_{\text{ч}}} \cdot \frac{24 \cdot \mu}{\rho_{\text{сеп.}} \cdot \omega \cdot d}$$

або

$$\frac{d\omega}{dt} = g \cdot \left(1 - \frac{\rho_{\text{сеп.}}}{\rho_{\text{ч}}} \right) - 18 \cdot \frac{\mu \cdot \omega}{\rho_{\text{ч}} \cdot d^2} \quad (4.11)$$

Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами. Його можна зобразити у вигляді:

$$\frac{d\omega}{dt} + a\omega = b,$$

де $a = \frac{18 \cdot \mu}{\rho_{\text{ч}} \cdot d^2}$ і $b = g \cdot \left(1 - \frac{\rho_{\text{сеп.}}}{\rho_{\text{ч}}} \right)$ — коефіцієнти відповідно.

Інтегральна форма рівняння (4.11):

$$\omega = \frac{g \cdot \left(1 - \frac{\rho_{\text{сеп.}}}{\rho_{\text{ч}}} \right) \cdot \rho_{\text{ч}} \cdot d^2}{18 \cdot \mu} \cdot \left(1 - e^{-\frac{18 \cdot \mu \cdot t}{\rho_{\text{ч}} \cdot d^2}} \right) \quad (4.12)$$

Для аналізу усталеного процесу осадження приймають, що $t \rightarrow \infty$ і складова $e^{-a \cdot t} \rightarrow 0$. Як наслідок отримують рівняння Стокса:

$$\omega = \frac{b}{a} = \frac{g(1 - \frac{\rho_{\text{сер.}}}{\rho_{\text{ч}}}) \cdot \rho_{\text{ч}} \cdot d^2}{18 \cdot \mu} = \frac{g \cdot (\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{сер.}}) \cdot d^2}{18 \cdot \mu} \quad (4.13)$$

Це рівняння дозволяє визначати швидкість осадження сферичної частинки відомого діаметра в усталеному режимі.

4.2. Приклади розв'язування завдань

Приклад 4.1. Азбестова сферична частинка ($\rho_{\text{т}} = 2600 \text{ кг/м}^3$) осідає в повітрі ($\rho_{\text{повітря}} = 1,29 \text{ кг/м}^3$; $\mu = 17,3 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$). Провести розрахунки і побудувати графіки зміни швидкості осадження в часі за таких значень діаметра d осаджуваної частинки, м: $0,5 \cdot 10^{-4}$; $1 \cdot 10^{-4}$; $2 \cdot 10^{-4}$; $3 \cdot 10^{-4}$; $4 \cdot 10^{-4}$; $5 \cdot 10^{-4}$.

Для кожного варіанта розрахунку визначити:

- швидкість сталого руху;
- число Рейнольдса за сталої швидкості осадження;
- режим сталого осадження;
- час виходу частинки на сталу швидкість.

Рекомендації для розв'язання. Виконання почати з розроблення математичної моделі осадження сферичної частинки. Математична модель повинна містити:

- диференціальне рівняння руху частинки;
- початкові умови осадження;
- рівняння для визначення коефіцієнту опору, який залежить від режиму осадження;
- рівняння визначення числа Рейнольдса.

Далі реалізувати алгоритм чисельного інтегрування рівняння руху частинки, використовуючи програму Mathcad 14. Метод Ейлера обрати як метод інтегрування. Процес руху частинки розглянути для інтервалу часу від 0 до 2 с. Крок інтегрування підібрати за умовами збіжності процесу чисельного розв'язання рівняння.

Для розв'язання цього завдання за допомогою пакета Mathcad 14 необхідно ввести початкові дані в одиницях системи СІ:

$$g := 9.81$$

$$d1 := 0.5 \cdot 10^{-4}$$

$$d2 := 1 \cdot 10^{-4}$$

$$\begin{aligned}
d3 &:= 2 \cdot 10^{-4} \\
d4 &:= 3 \cdot 10^{-4} \\
d5 &:= 4 \cdot 10^{-4} \\
d6 &:= 5 \cdot 10^{-4} \\
\rho &:= 1.29 \\
\mu &:= 17.3 \cdot 10^{-6} \\
\rho t &:= 2600
\end{aligned}$$

Записати вираз для визначення числа Рейнольдса, зважаючи на те, що розрахунок буде проведений для шести різних діаметрів:

$$\text{Re}(\omega, d) := \rho \cdot \omega \cdot \frac{d}{\mu}$$

Записати вираз для визначення коефіцієнта опору середовища, який залежить від режиму руху частинки, тобто від значення критерію Рейнольдса, за допомогою логічної функції:

$$\xi(\omega, d) := \text{if} \left(\omega = 0, 0, \text{if} \left(\text{Re}(\omega, d) < 1.9, \frac{24}{\text{Re}(\omega, d)}, \text{if} \left(\text{Re}(\omega, d) \geq 500, \frac{18.5}{\text{Re}(\omega, d)^{0.6}}, 0.44 \right) \right) \right)$$

Записати праву частину диференційного рівняння вільного осадження частинки, визначивши її як функцію $f(w, d)$, для подальшого спрощення запису алгоритму розрахунку:

$$f(\omega, d) := g \cdot \left(1 - \frac{\rho}{\rho t} \right) - \frac{3 \cdot \xi(\omega, d) \cdot \omega^2 \cdot \rho}{4 \cdot \rho t \cdot d}$$

Визначити умови інтегрування — задати крок розрахунку та кількість точок обчислювання:

$$\begin{aligned}
h &:= 0.01 \\
N &:= 100 \\
i &:= 0..N-1
\end{aligned}$$

Розв'язання з використанням Mathcad 14. Диференційне рівняння вільного осадження частинки розв'язуємо за допомогою метода Ейлера. Для цього вводимо початкові значення часу і швидкості осадження частинок для всіх заданих діаметрів:

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ \omega_{10} \\ \omega_{20} \\ \omega_{30} \\ \omega_{40} \\ \omega_{50} \\ \omega_{60} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Описуємо схему визначення часу і швидкості осадження частинок для кожного кроку:

$$\begin{pmatrix} t_{i+1} \\ \omega_{1i+1} \\ \omega_{2i+1} \\ \omega_{3i+1} \\ \omega_{4i+1} \\ \omega_{5i+1} \\ \omega_{6i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t_i + h \\ \omega_{1i} + h \cdot f(\omega_{1i}, d1) \\ \omega_{2i} + h \cdot f(\omega_{2i}, d2) \\ \omega_{3i} + h \cdot f(\omega_{3i}, d3) \\ \omega_{4i} + h \cdot f(\omega_{4i}, d4) \\ \omega_{5i} + h \cdot f(\omega_{5i}, d5) \\ \omega_{6i} + h \cdot f(\omega_{6i}, d6) \end{pmatrix}$$

Результати обчислень зображуємо у вигляді графіка (рис. 4.2).

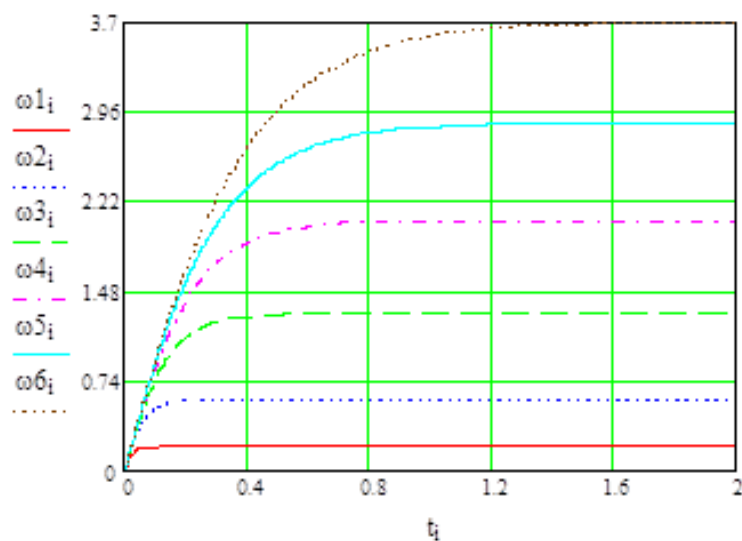


Рис. 4.2. Зміна швидкості осадження сферичних частинок різного діаметра залежно від часу (до прикладу 4.1)

З графіка видно, що на стаціонарний режим осадження протягом заданого часу ($t_{200} = 2$ с) встигають вийти частинки, крім частинок діаметром $d_6 = 5 \cdot 10^{-4}$ м.

Аналіз поведінки сферичних частинок різного діаметра наведено в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Діаметр, м	Стала швидкість, м/с	Re	Режим осадження	Час виходу на усталений режим, с
$0,5 \cdot 10^{-4}$	0,205	0,763	ламінарний	0,145
$1 \cdot 10^{-4}$	0,588	4,381	перехідний	0,312
$2 \cdot 10^{-4}$	1,298	19,35	перехідний	0,709
$3 \cdot 10^{-4}$	2,064	46,16	перехідний	1,383
$4 \cdot 10^{-4}$	2,867	85,49	перехідний	1,812
$5 \cdot 10^{-4}$	–	–	–	–

Ламінарне осадження спостерігається за значення діаметра частинки $d_1 = 0,5 \cdot 10^{-4}$ м.

Наведемо приклад розв'язання цього завдання у MS Excel.

Уведення початкових даних у робоче поле MS Excel:

	A	B	C	D	E	F
1	d1	ρ частинки	ρ середовища	μ	g	h
2	0,00005	2600	1,29	1,73E-05	9,81	0,01

Приклад введення формул для обчислення значення критерію Рейнольдса, коефіцієнта опору з використанням логічної функції та швидкості осадження частинок наведений на рис. 4.3. На рис. 4.4-4.5 наведено результати обчислення для кожного варіанта діаметра осаджувальної частинки, за якими буде створено графічну залежність швидкості від часу (рис. 4.6).

	A	B	C	D	E	F
1	d1	ρ ч	ρ с	μ	g	h
2	0,00005	2600	1,29	1,73E-05	9,81	0,01
3						
4	t	Re	ω_1	ξ		
5	0	0	0	0,00		
6	0,01	0,36556709	0,09805	33,84		
7	0,02	0,64086912	0,17189	24,16		
8	0,03	0,8083552	0,21681	21,02		
9	0,04	0,89975027	0,24123	19,71		

Формули:

- Для **Re** (ячейка B5): $=C5*A\$2*C\$2/D\$2$
- Для **ω_1** (ячейка C5): $=C5+(E\$2*(1-(C\$2/B\$2))-D5*((C5^2*C\$2^3)/(A\$2*B\$2^4)))*F\$2$
- Для **ξ** (ячейка D5): $=ЕСЛИ(B5=0;0;ЕСЛИ(B5<0,2;24/B5;ЕСЛИ(0,2<=B5<=500;0,44;18,5/(B5^0,6))))$

Рис. 4.3. Приклад введення формул для обчислення в MS Excel (до прикладу 4.1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	d1	$\rho\chi$	ρc	μ	g	h	d2	$\rho\chi$	ρc	μ		d3	$\rho\chi$	ρc	μ
2	0,00005	2600	1,29	2E-05	9,8	0,01	0,0001	2600	1,29	1,7E-05		0,0002	2600	1,29	1,7E-05
3															
4	t	Re	$\omega 1$	ξ			t	Re	$\omega 2$	ξ		t	Re	$\omega 3$	ξ
5	0	0	0	0,00			0	0	0	0,00		0	0	0	0,00
6	0,01	0,365567	0,0981	33,84			0,01	0,7311342	0,0981	22,32		0,01	1,462268	0,0981	14,73
7	0,02	0,640869	0,1719	24,16			0,02	1,4027156	0,1881	15,10		0,02	2,885247	0,1935	9,80
8	0,03	0,808355	0,2168	21,02			0,03	1,9855764	0,2663	12,26		0,03	4,245773	0,2847	7,77
9	0,04	0,899759	0,2413	19,71			0,04	2,4755274	0,332	10,74		0,04	5,533304	0,371	6,63

Рис. 4.4. Приклад обчислення для діаметрів частинки d1, d2, d3 в MS Excel (до прикладу 4.1)

Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD
d4	$\rho\chi$	ρc	μ		d5	$\rho\chi$	ρc	μ		d6	$\rho\chi$	ρc	μ
0,0003	2600	1,29	1,7E-05		0,0004	2600	1,29	1,7E-05		0,0005	2600	1,29	1,7E-05
t	Re	$\omega 4$	ξ		t	Re	$\omega 5$	ξ		t	Re	$\omega 6$	ξ
0	0	0	0,00		0	0	0	0,00		0	0	0	0,00
0,01	2,193403	0,0981	11,55		0,01	2,924537	0,098	9,72		0,01	3,655671	0,0981	8,50
0,02	4,356	0,1947	7,65		0,02	5,823152	0,195	6,43		0,02	7,288668	0,1955	5,62
0,03	6,468904	0,2892	6,03		0,03	8,679704	0,291	5,06		0,03	10,88476	0,2919	4,42
0,04	8,522275	0,381	5,11		0,04	11,48537	0,385	4,28		0,04	14,43598	0,3872	3,73

Рис. 4.5. Приклад обчислення для діаметрів частинки d4, d5, d6 в MS Excel (до прикладу 4.1)

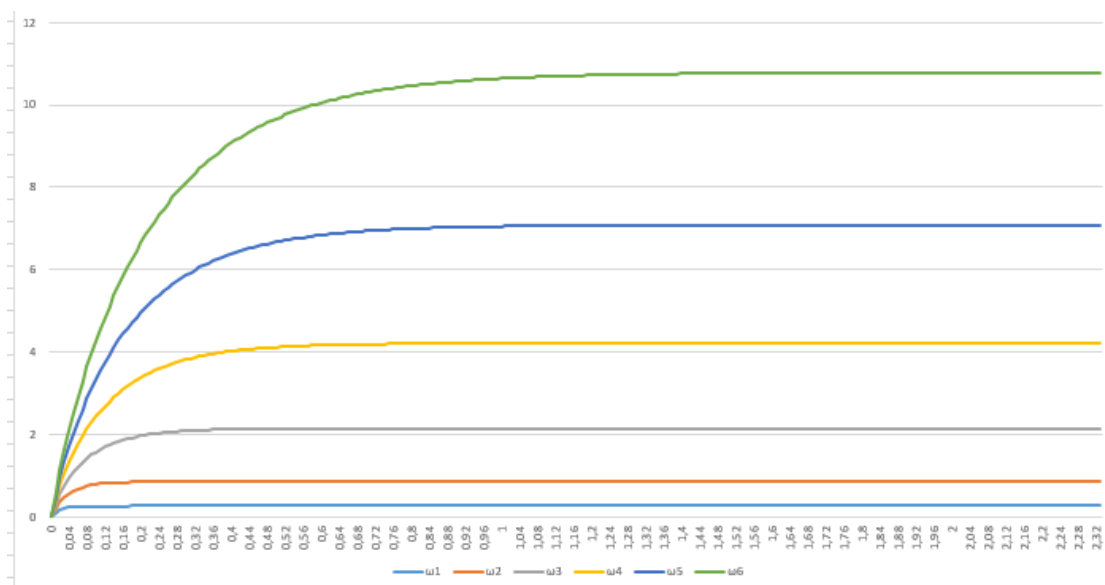


Рис. 4.6. Графічна залежність швидкості від часу для частинок різного діаметра в MS Excel (до прикладу 4.1)

Вихід на усталений режим визначається аналогічно за умови сталого значення швидкості. Потім отримані значення швидкості, числа Рейнольдса і встановлені за цими даними режими осадження заносяться в табл. 4.1.

Приклад 4.2. У повітрі ($\rho = 1,29 \text{ кг/м}^3$; $\mu = 17,3 \cdot 10^{-6} \text{ Па}\cdot\text{с}$) за $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ осаджуються у вільному режимі дві частинки з однаковими масами і щільністю ($m = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ кг}$, $\rho_{\text{ч}} = 2600 \text{ кг/м}^3$), але різної геометричної форми: сферичної ($d = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$) і кубічної (сторона ребра куба $a = 1,03 \cdot 10^{-4} \text{ м}$).

Потрібно порівняти швидкості осадження частинок і зробити вивід про ефективність осадження залежно від геометричної форми частинки.

Розв'язування з використанням Mathcad 14. Математична модель осадження сферичної і кубічної частинок описується рівнянням (4.8) з початковими умовами:

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ \omega_0 = 0 \end{cases}$$

Вхідний параметр S (площа поперечного перетину) має різні значення залежно від форми частинки. Для сферичної частинки площа поперечного перетину обчислюється за формулою: $S_{\text{сф}} = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$, а для кубічної — $S_{\text{куб}} = a^2$.

Вводимо початкові дані в робоче поле Mathcad 14:

$$\begin{aligned} \rho &:= 1.29 \\ \mu &:= 17.3 \cdot 10^{-6} \\ \rho_{\text{ч}} &:= 2600 \\ m &:= 0.5 \cdot 10^{-6} & d &:= 0.5 \cdot 10^{-4} \\ g &:= 9.81 & a &:= 1.03 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

За руху частинок некулястої форми необхідно визначити еквівалентний діаметр за формулою:

$$d_1 := 1.24 \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{\rho_{\text{ч}}}}$$

Запишемо вираз для визначення числа Рейнольдса, враховуючи необхідність проведення розрахунку для двох частинок різного діаметра:

$$\text{Re}(w, d) := \frac{\rho \cdot w \cdot d}{\mu}$$

Коефіцієнт опору середовища, який залежить від критерію Рейнольдса, визначаємо за логічним виразом:

$$\xi(w, d) := \text{if} \left(\text{Re}(w, d) = 0, 0, \text{if} \left(\text{Re}(w, d) \leq 1.9, \frac{24}{\text{Re}(w, d)}, \text{if} \left(\text{Re}(w, d) > 500, 0.44 \cdot \frac{18.5}{\text{Re}(w, d)^{0.6}}, \right) \right) \right)$$

Запишемо формули для визначення площі перерізу частинок і обчислимо їх значення:

— для кулястої частинки:

$$S1 := \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

— для кубічної частинки:

$$S2 := a^2$$

У результаті розрахунків отримаємо:

$$S1 = 1.963 \times 10^{-9}$$

$$S2 = 1.061 \times 10^{-8}$$

Вводимо позначення для правих частин диференціальних рівнянь, що визначають зміну швидкості осадження частинок у часі:

$$f1(w) := g \cdot \left(1 - \frac{\rho}{\rho_t} \right) - \xi(w, d) \cdot \rho \cdot S1 \cdot \frac{w^2}{2 \cdot m}$$

$$f2(w) := g \cdot \left(1 - \frac{\rho}{\rho_t} \right) - \xi(w, d1) \cdot \rho \cdot S2 \cdot \frac{w^2}{2 \cdot m}$$

Визначаємо умови інтегрування:

$$h := 0.001$$

$$N := 20000$$

$$i := 0..N - 1$$

Описуємо початкові умови інтегрування для двох випадків:

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ w1_0 \\ w2_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Розрахунок проводимо із застосуванням методу Ейлера за визначеною схемою:

$$\begin{pmatrix} t_{i+1} \\ w1_{i+1} \\ w2_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t_i + h \\ w1_i + h \cdot f1(w1_i) \\ w2_i + h \cdot f2(w2_i) \end{pmatrix}$$

На підставі отриманих даних будуємо графік (рис. 4.7).

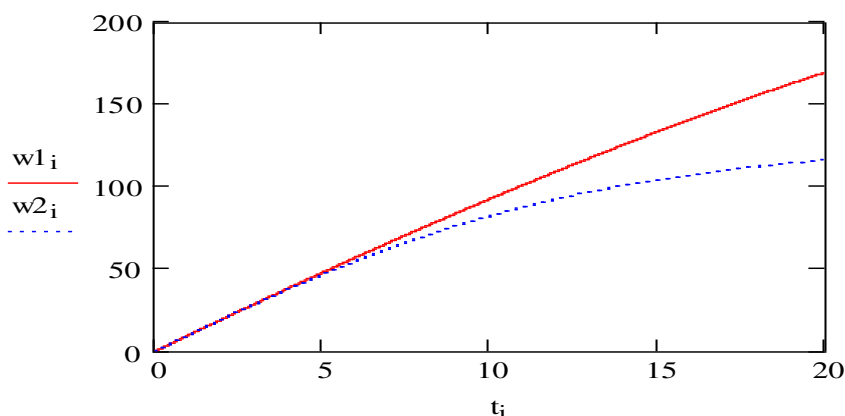


Рис. 4.7. Зміна швидкості осадження частинок різної форми у часі (до прикладу 4.2): w1 — сферичної; w2 — кубічної

Як видно з графіка, на швидкість вільного осадження суттєво впливає форма частинки. Сферична частинка за умовами завдання має меншу площу перерізу, кубічна — більшу. Чим більше площа перерізу частинки, тим більш значний опір виявляє середовище осадження і тим менше швидкість її руху.

4.3. Складання математичної моделі стисненого осадження частинок

Стиснене осадження — це осадження частинки з урахуванням її взаємодії з іншими осаджуваними частинками. Під час аналізу осадження частинки в таких умовах необхідно враховувати такі чинники:

- механічне зіткнення частинок;
- вплив гідродинамічних ефектів, що виникають під час руху великої кількості частинок у середовищі;
- під час підходу до зони осаду осаджувана частинка потрапляє в протитечію руху рідини.

Урахування всіх ефектів на практиці проводять шляхом уточнення загальної сили опору, що діє на осаджувану частинку. Під час осадження частинок весь простір можна розділити на декілька зон (рис. 4.8).

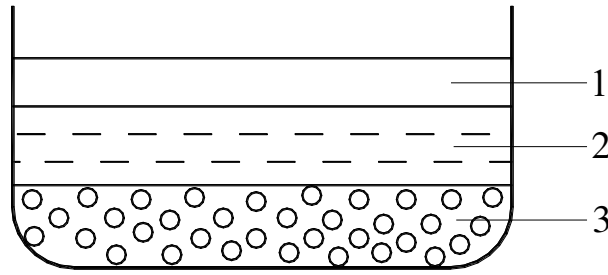


Рис. 4.8. Різні зони стисненого осадження: 1 — зона вільного осадження; 2 — зона обмеженого осадження; 3 — шар осаду

Над шаром осаду утворюється зона стисненого осадження. Рухи в цій зоні супроводжуються тертям між частинками та їхніми взаємними зіткненнями. Дрібніші частинки гальмують рух більших, а частинки великих розмірів захоплюють за собою дрібні, прискорюючи їх рух. У результаті спостерігається тенденція до зближення швидкостей осадження частинок різних розмірів.

Швидкість стисненого осадження менше за швидкість вільного осадження. Це пояснюється тим, що під час стисненого осадження частинки зазнають не тільки більшого опору середовища, але і додаткового опору, обумовленого тертям і зіткненням частинок.

Збільшення опору середовища пов'язане тут з динамічною дією на неї всієї маси осаджуваних частинок, яке спричиняє виникнення висхідного потоку середовища, а також зі зростанням в'язкості середовища.

Під час моделювання стисненого осадження в рівнянні вільного осадження перелічені ефекти враховуються в силі опору середовища:

$$F_c = F_0 \cdot \lambda(\varphi), \quad (4.14)$$

де F_0 — сила опору за вільного осадження; $\lambda(\varphi)$ — поправкова функція, за допомогою якої враховуються додаткові види опору, що виникають у разі стисненого осадження, а також залежність сили опору середовища від об'ємної концентрації осаджуваних частинок φ .

Оскільки вільне осадження частинок є окремим випадком стисненого, то з рівняння стисненого осадження можна отримати рівняння вільного за умови $\lambda(\varphi) = 1$; $\varphi = 0$.

З експериментальних досліджень отримана така залежність поправкової функції λ від об'ємної концентрації осаджуваних частинок φ :

$$\lambda(\varphi) = \frac{4+3 \cdot \varphi+3 \cdot \sqrt{8 \cdot \varphi-3 \cdot \varphi^2}}{(2-3 \cdot \varphi)^2} \quad (4.15)$$

З умов осадження виходить, що об'ємна концентрація φ змінюється з висотою камери осадження, тобто є функцією пройденого шляху. Об'ємна концентрація змінюється від мінімального значення φ_n у верхньому перетині камери до

максимального кінцевого значення φ_k у нижньому перерізі. У цілому вважати-
 мемо, що об'ємна концентрація є функцією пройденого частинкою шляху (гли-
 бини камери), тобто $\varphi = (x)$, де x — пройдений осаджуваною частинкою шлях.
 Тобто поправкова функція $\lambda(\varphi)$ також буде функцією пройденого частинкою
 шляху.

Тоді для сферичної частинки рівняння стисненого осадження набуде ви-
 гляду:

$$\frac{d\omega}{dt} = g\left(1 - \frac{\rho}{\rho_q}\right) - \frac{3}{4} \cdot \xi \cdot \frac{\omega^2 \cdot \rho}{\rho_q \cdot d} \cdot \lambda(\varphi) \quad (4.16)$$

Враховуючи, що $\omega = \frac{dx}{dt}$, рівняння стисненого осадження перетвориться до
 вигляду:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\left(1 - \frac{\rho}{\rho_q}\right) - \frac{3}{4} \cdot \xi \cdot \frac{\rho}{\rho_q \cdot d} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \cdot \lambda(\varphi) \quad (4.17)$$

Коефіцієнт опору ξ набуває таких значень:

$$\xi = \begin{cases} \frac{24}{Re}, & Re \leq 1,9, \\ 0,44, & 1,9 < Re < 500, \\ \frac{18,5}{Re^{0,6}}, & Re \geq 500 \end{cases} \quad (4.18)$$

де $Re = \frac{\rho \cdot d}{\mu} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)$.

Розв'язання цього рівняння проводиться за початкових умов:

$$x(0) = x_0 \quad \frac{dx}{dt}(0) = \omega_0$$

Для розрахунків обирають такі закони зміни об'ємної концентрації за гли-
 биною осаджувальної камери H :

а) лінійний закон:

$$\varphi(x) = \varphi_H + \frac{\varphi_k - \varphi_H}{H} \cdot x \quad (4.19)$$

З математичного погляду це лінійне рівняння вигляду $\varphi(x) = a + b \cdot x$,
 для розв'язання якого необхідно задати граничні умови. У початковий момент
 часу об'ємна концентрація частинок складає $\varphi(0) = \varphi_H$. Тоді маємо, що
 $\varphi(0) = a + b \cdot 0$, тобто $a = \varphi_H$.

Об'ємна концентрація частинок, які пройшли весь шлях і досягли дна
 осаджувальної камери, дорівнює:

$$\varphi(x) = \varphi_k$$

Оскільки шлях, пройдений частинкою, визначається глибиною осаджувальної камери H , тобто $x = H$, то одержимо, що:

$$\varphi_k = a + b \cdot H = \varphi_H + b \cdot H,$$

тобто $b = \frac{\varphi_k - \varphi_H}{H}$.

Таким чином отримуємо рівняння (4.19).

б) експоненціальний закон:

$$\varphi(x) = \varphi_H \cdot \left(\frac{\varphi_k}{\varphi_H}\right)^{\frac{x}{H}} \quad (4.20)$$

Це рівняння загального математичного вигляду $\varphi(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$. У початковий момент часу об'ємна концентрація частинок складає $\varphi(x) = \varphi_k$, тоді $\varphi(0) = a \cdot e^{b \cdot 0} = a$, тобто $a = \varphi_H$. Об'ємна концентрація частинок, які пройшли весь шлях і досягли дна осаджувальної камери, складає $\varphi(x) = \varphi_k$. Тоді маємо, що $\varphi(x) = a \cdot e^{b \cdot H} = \varphi_H \cdot e^{b \cdot H} = \varphi_k$ або $\varphi_k = \varphi_H \cdot e^{b \cdot H}$ або

$$\frac{\varphi_k}{\varphi_H} = e^{b \cdot H} \quad (4.21)$$

Перетворюємо рівняння (4.21) таким чином і визначаємо коефіцієнт b :

$$\begin{aligned} \ln \frac{\varphi_k}{\varphi_H} &= b \cdot H \\ b &= \frac{1}{H} \cdot \ln \frac{\varphi_k}{\varphi_H} \\ b &= \left(\ln \frac{\varphi_k}{\varphi_H} \right)^{\frac{1}{H}} \end{aligned}$$

Отримуємо експоненційний закон (4.20).

Для числового розв'язання диференційного рівняння стисненого осадження від рівняння 2-го порядку (4.17) переходять до системи двох рівнянь першого порядку. Для цього роблять таку заміну змінних.

Припустимо, що x_1 — пройдений частинкою шлях, $x_2 = \frac{dx_1}{dt}$ — швидкість осадження частинки. Тоді початкове рівняння (4.17) можна зобразити системою рівнянь такого вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_T} \right) - \frac{3}{4} \cdot \xi(x_2) \cdot \frac{\rho}{\rho_q \cdot d} \cdot (x_2)^2 \cdot \lambda(x_1) \end{cases} \quad (4.22)$$

4.4. Приклади розв'язування завдань

Приклад 4.1. Проаналізувати залежність швидкості осадження і шляху, що пройде частинка, від в'язкості середовища. Початкові дані: густина середовища осадження $\rho_c = 1000 \text{ кг/м}^3$; щільність частинки, $\rho_t = 2200 \text{ кг/м}^3$; діаметр частинки, $d = 9 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; в'язкість середовища, Па·с: $\mu_1 = 0,1 \cdot 10^{-3}$, $\mu_2 = 10^{-4}$, $\mu_3 = 20 \cdot 10^{-3}$; глибина осаджувальної камери, 4 м; початкова об'ємна концентрація частинок $\phi_n = 0,02$, кінцева концентрація $\phi_k = 0,95$.

Рекомендації для розв'язування. Розрахунки переміщення і швидкості осадження для заданих значень в'язкості проводити, використовуючи лінійний закон розподілу об'ємної концентрації.

Для розв'язання завдання необхідно скласти математичну модель, яка містить:

- диференційне рівняння стисненого руху;
- початкові та граничні умови осадження;
- вираз для визначення коефіцієнта опору, який залежить від режиму осадження;
- формулу для визначення числа Рейнольдса;
- вираз для поправкової функції;
- лінійний закон зміни об'ємної концентрації.

Розв'язання з використанням Mathcad 14. Вводимо в робоче поле значення фізичних параметрів системи в одиницях вимірювання системи СІ та вихідні умови осадження:

$\rho := 1000$	$H := 4$
$\rho_t := 2200$	$\phi_n := 0.02$
$d := 9 \cdot 10^{-3}$	$\phi_k := 0.95$
$\mu_1 := 0.1 \cdot 10^{-3}$	$t_n := 0$
$\mu_2 := 10 \cdot 10^{-3}$	$t_k := 20$
$\mu_3 := 20 \cdot 10^{-3}$	$n := 3000$

Запишемо вираз для визначення числа Рейнольдса як функцію від в'язкості середовища (необхідно провести розрахунки для кількох значень μ) і швидкості руху частинок:

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$\text{Re}(w, \mu) := \rho \cdot d \cdot \frac{w}{\mu}$$

Записуємо лінійний закон зміни об'ємної концентрації від пройденого частинкою шляху:

$$\phi(x) := \phi_n + \frac{\phi_k - \phi_n}{H} \cdot x$$

Записуємо поправкову функцію для урахування додаткових видів опору:

$$\lambda(x) := \frac{4 + 3 \cdot \phi(x) + 3 \cdot (8 \cdot \phi(x) - 3 \cdot \phi(x)^2)^{\frac{1}{2}}}{(2 - 3 \cdot \phi(x))^2}$$

Формулу для розрахунку коефіцієнта опору середовища, який залежить від критерію Рейнольдса, подаємо у вигляді логічної функції:

$$\xi(x, \mu) := \text{if} \left(x > 0, \text{if} \left(\text{Re}(x, \mu) \leq 1.9, \frac{24}{\text{Re}(x, \mu)}, \text{if} \left(\text{Re}(x, \mu) \leq 500, \frac{18.5}{\text{Re}(x, \mu)^{0.6}}, 0.44 \right) \right), 0 \right)$$

Введемо додаткові змінні, що дозволяють розв'язати рівняння стисненого осадження частинок: X_1 — пройдений частинкою шлях; X_2 — швидкість осадження частинки.

У початковий момент часу швидкість осадження частинки і шлях дорівнюють нулю, тобто записуємо:

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вводимо систему рівнянь для різних значень в'язкості середовища згідно з виразом (4.22) і реалізуємо процес його числового розв'язання, використовуючи метод Рунге-Кутта.

Визначаємо праві частини наведеної системи диференціальних рівнянь:

— для першого значення в'язкості:

$$D1(t, X) := \begin{bmatrix} X_2 \\ 9.81 \cdot \left(1 - \frac{\rho}{\rho_t} \right) - \frac{3}{4} \cdot \xi(X_2, \mu_1) \cdot \rho \cdot (X_2)^2 \cdot \frac{\lambda(X_1)}{\rho_t \cdot d} \end{bmatrix}$$

- для другого значення в'язкості:

$$D2(t, X) := \begin{bmatrix} X_2 \\ 9.81 \cdot \left(1 - \frac{\rho}{\rho t}\right) - \frac{3}{4} \cdot \xi(X_2, \mu_2) \cdot \rho \cdot (X_2)^2 \cdot \frac{\lambda(X_1)}{\rho t \cdot d} \end{bmatrix}$$

- для третього значення в'язкості:

$$D3(t, X) := \begin{bmatrix} X_2 \\ 9.81 \cdot \left(1 - \frac{\rho}{\rho t}\right) - \frac{3}{4} \cdot \xi(X_2, \mu_3) \cdot \rho \cdot (X_2)^2 \cdot \frac{\lambda(X_1)}{\rho t \cdot d} \end{bmatrix}$$

Розв'язати систему диференціальних рівнянь дозволяє вбудована функція *rkfixed*:

$$Z := \text{rkfixed}(X, t_n, t_k, n, D),$$

де X — стовпчик невідомих (перед зверненням до них потрібно задати початкові значення); t_n — початковий момент часу інтегрування системи; t_k — кінцевий момент часу; n — кількість ділянок розбиття інтервалу інтеграції; D — стовпчик правих частин наведеної системи рівнянь; Z — матриця розв'язків системи рівнянь: стовпчик 1 — дискретні моменти часу для визначення розв'язки; стовпчик 2 — значення невідомою X_1 ; стовпчик 3 — значення невідомою X_2 .

Розв'язання системи для кожного значення в'язкості має вигляд:

$$Z1 := \text{rkfixed}(X, t_n, t_k, n, D1)$$

$$Z2 := \text{rkfixed}(X, t_n, t_k, n, D2)$$

$$Z3 := \text{rkfixed}(X, t_n, t_k, n, D3)$$

Побудуємо графік зміни швидкості осадження в часі для різних значень в'язкості середовища осадження (рис. 4.10).

З рис. 4.10 видно, що за стисненого осадження існує деякий проміжок часу (від 0 до 0,24 с), що характеризує осадження частинки в зоні вільного руху (рис. 4.11).

У цьому інтервалі часу спостерігається зростання швидкості осадження. Як тільки частинка входить в зону утрудненого руху, її швидкість поступово знижується (рис. 4.12).

Чим більша в'язкість середовища, в якому відбувається процес, тим з меншою швидкістю рухаються частинки в будь-якій зоні осадження. У зоні осаду швидкості частинок вирівнюються для даних значень в'язкості. Графік зміни шляху осадження частинок у часі зображено на рис. 4.13.

$i := 1..n$

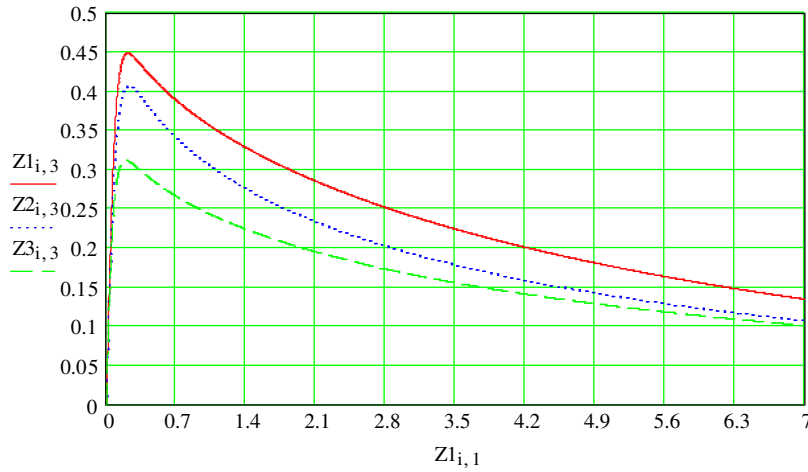


Рис. 4.10. Графік зміни швидкості осадження частинок ($z_{1,1}$) у часі ($z_{1,3}$) за різних значень в'язкості середовища (до прикладу 4.1)

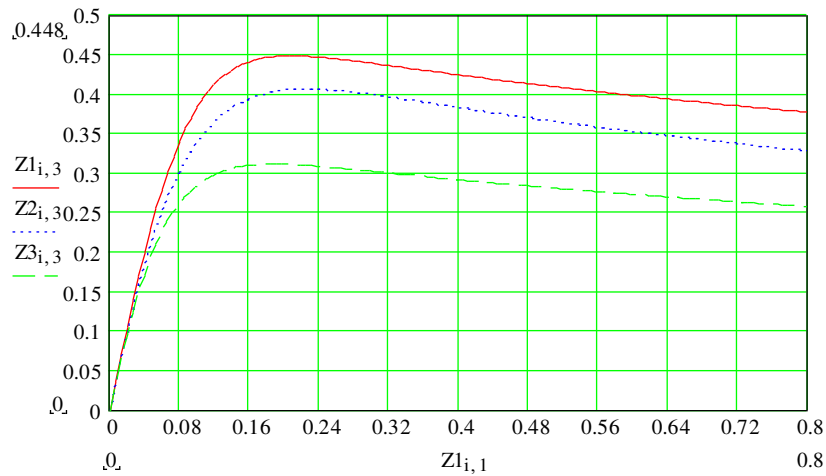


Рис. 4.11. Графік зміни швидкості переміщення частинок ($z_{1,3}$) у зоні вільного осадження у часі ($z_{1,1}$) (до прикладу 4.1)

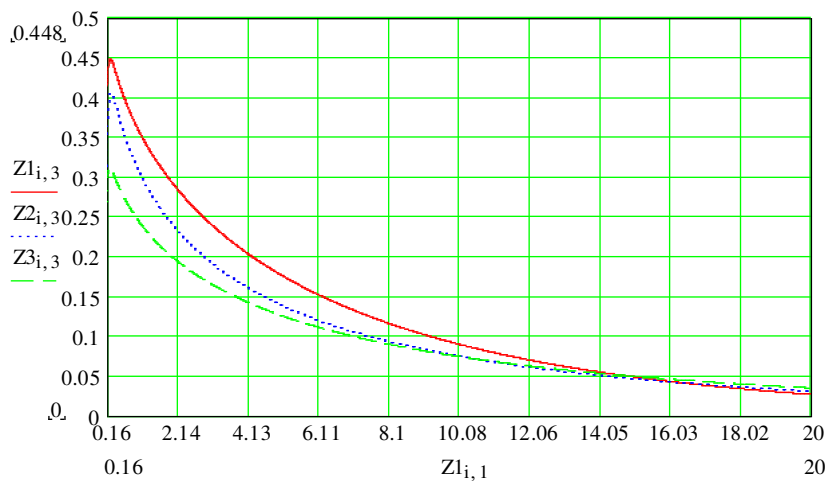


Рис. 4.12. Графік зміни швидкості переміщення частинок ($z_{1,3}$) у зоні утрудненого осадження у часі ($z_{1,1}$) (до прикладу 4.1)

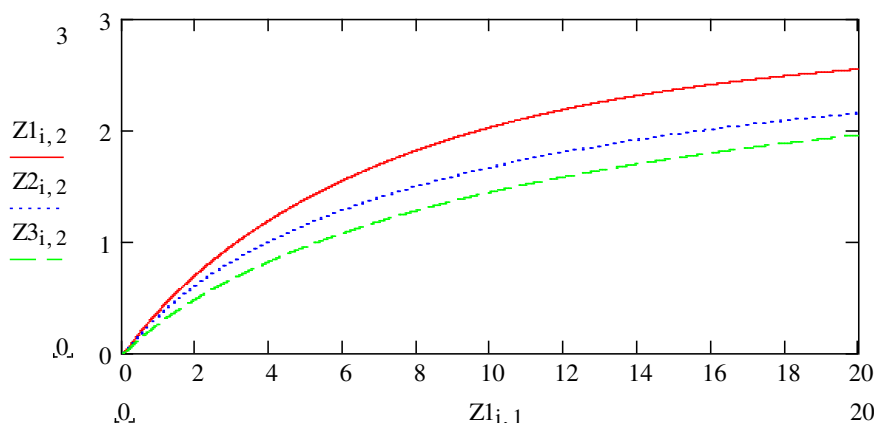


Рис. 4.13. Графік зміни шляху частинок ($z_{1,2}$) у середовищах з різною в'язкістю у часі ($z_{1,1}$) (до прикладу 4.1)

Як видно з рис. 4.13, частинки за визначений час не досягають дна камери осадження у жодному разі.

Наведемо приклад розв'язання цього завдання в MS Excel.

Вводимо початкові дані в робоче поле MS Excel:

	A	B
1	ρc	1000
2	$\rho \chi$	2200
3	d	0,009
4	μ_1	0,0001
5	μ_2	0,01
6	μ_3	0,02
7	H	4
8	φ_*	0,02
9	φ_*	0,95
10	g	9,81
11	h	0,009

Далі записуємо розрахункові формули з математичної моделі для першого значення в'язкості середовища (рис. 4.14) і додаємо ще два аналогічні блоки для інших значень (рис. 4.15). Отримуємо результати обчислень, за якими будемо графічні залежності швидкості осадження частинок від в'язкості середовища осадження у часі (рис. 4.16).

За графіком видно, що зростання швидкості у середовищі з в'язкістю 0,0001 Па·с спостерігається до 0,558 с; з в'язкістю 0,01 Па·с — до 0,216 с; з в'язкістю 0,02 Па·с — до 0,189 с.

Як тільки частинка входить у зону обмеженого осадження, її швидкість поступово знижується. Чим більша в'язкість середовища, в якому відбувається процес, тим з меншою швидкістю рухається частинка у будь-якій зоні осадження.

Графік залежності шляху, який пройде частинка, від в'язкості навколишнього середовища наведено на рис. 4.17. Як видно за графіком, за жодного значення в'язкості частинки не досягають дна камери.

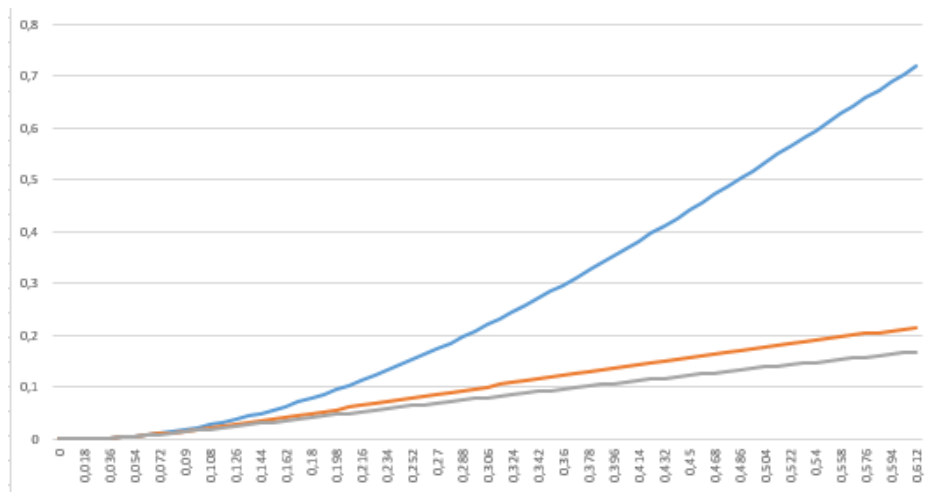


Рис. 4.17. Графічні залежності переміщення частинок від в'язкості середовища осадження у часі

Як видно з графіка, жодне значення в'язкості середовища не дозволяє частинкам за визначений час досягти дна камери.

Питання для самоконтролю

1. Які сили діють на частинки, що осідають у гравітаційному полі?
2. Запишіть диференційне рівняння вільного осадження частинки.
3. За якою формулою можна розрахувати силу опору середовища?
4. Від яких параметрів залежить коефіцієнт опору середовища?
5. Виведіть формулу Стоксу.
6. Поясніть метод довільних коефіцієнтів для вирішення лінійного диференційного рівняння першого порядку.
7. Запишіть алгоритм розрахунку коефіцієнта опору середовища за допомогою логічної функції *if*.
8. Які додаткові чинники необхідно враховувати для опису обмеженого осадження частинок?
9. Що враховує поправкова функція $\lambda(\varphi)$?
10. Запишіть емпіричну залежність поправкової функції $\lambda(\varphi)$ від об'ємної концентрації частинок, що осідають.
11. Функцією якого параметра є об'ємна концентрація частинок за обмеженого осадження?
12. Отримаєте лінійний закон зміни об'ємної концентрації від глибини осаджувальної камери.
13. Виведіть експоненціальну залежність зміни об'ємної концентрації від глибини осаджувальної камери.
14. Наведіть диференційне рівняння обмеженого осадження другого порядку системою двох рівнянь першого порядку.
15. Запишіть алгоритм розв'язання системи диференційних рівнянь першого порядку за допомогою функції *rkfixed*.

5. МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПЕРЕДАЧІ

Клас теплових процесів складають процеси нагрівання, охолодження, конденсації, випаровування, теплообміну тощо. Швидкість теплових процесів визначається законами теплопередачі. Рушійною силою процесів перенесення тепла є різниця температур. Перенесення тепла від однієї точки простору в іншу може здійснюватися у результаті процесів теплопровідності, конвекції і випромінювання.

Процес перенесення тепла за рахунок теплопровідності речовини в нерухомому шарі товщиною h описується рівнянням Фур'є:

$$q_T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial h} F \quad (5.1)$$

Перенесення тепла від потоку до твердої стінки за рахунок конвекції визначається рівнянням Ньютона:

$$q_T = \alpha(T - T_{\text{ст}}) \cdot F \quad (5.2)$$

У рівнянні коефіцієнт конвективної тепловіддачі α є складною функцією двох груп параметрів:

- 1) теплофізичних характеристик потоку (теплоємність, в'язкість, теплопровідність, щільність тощо);
- 2) величин, що визначають гідродинаміку потоку й умови конвективного перенесення тепла в потоці.

Коефіцієнт α для сталого процесу знаходиться як вирішення системи, що складається з рівнянь Нав'є-Стокса і нерозривності потоку.

Рівняння Фур'є-Кірхгофа:

$$u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5.3)$$

є рівнянням теплового балансу для нескінченно малого об'єму dV у рухомому потоці й описує конвективне перенесення тепла в усталеному потоці ($\alpha = \frac{\lambda}{c \cdot \rho}$ — коефіцієнт температуропровідності середовища, c — теплоємність одиниці маси) і межових умов ($\alpha(T - T_{\text{ст}}) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial h} |_{h=0}$).

Межові умови для процесу теплообміну від середовища до стінки одержуються з розгляду й опису фізичних явищ у пристінковій зоні. На поверхні стінки утворюється ламінарний шар товщиною h , перенесення тепла в якому здійснюється тільки за рахунок теплопровідності. Визначивши за рівнянням Фур'є потік тепла через ламінарний шар і прирівнявши його до правої частини рівняння Ньютона, отримаємо межові умови.

5.1. Складання математичної моделі передачі тепла по довжині металевого стрижня в усталеному режимі

Розглянемо процес розповсюдження тепла по довжині металевого стрижня, що підігрівається з одного кінця, упродовж деякого проміжку часу.

Схему простої системи, що складається з теплоізовованого з трьох боків металевого стрижня, наведено на рис. 5.1.



Рис. 5.1. Схема металевого теплоізовованого стрижня

У початковий момент часу температура всього стрижня однакова і дорівнює T_0 . У цей момент часу до неізовованого кінця стрижня підноситься деяке тіло, заздалегідь нагріте до температури T . Температура джерела тепла надалі підтримується сталою.

Температура стрижня буде змінюватися у часі (рис. 5.2). У точках, що знаходяться на різних відстанях від неізовованого кінця стрижня, в одні й ті самі моменти часу температура буде різною, тобто $T = T(x, t)$.

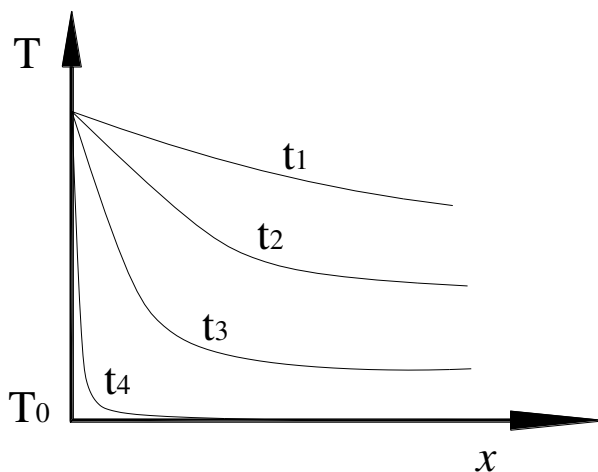


Рис. 5.2. Зміна температури стрижня по довжині для різних моментів часу

Цей приклад належить до тих випадків, коли основні параметри, які характеризують процес (температура, тиск, концентрації тощо), залежать від кількох змінних одночасно — часу і просторових координат. Тому для пошуку співвідношень, що пов'язують технологічні параметри, неминуче отримуємо рівнянь у частинних похідних.

Режим зміни температури в часі і в просторі описується рівнянням Лапласа:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + u_x \frac{\partial t}{\partial x} + u_y \frac{\partial t}{\partial y} + u_z \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right), \quad (5.4)$$

де $\frac{\partial t}{\partial \tau}$ — динаміка зміни температури в часі; $u_x \frac{\partial t}{\partial x} + u_y \frac{\partial t}{\partial y} + u_z \frac{\partial t}{\partial z}$ — конвективний теплообмін, пов'язаний з переміщенням теплоносія; $\frac{\lambda}{c \cdot \rho} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right)$ — залежність температури від положення точки в просторі і від властивостей середовища.

Розв'язати систему рівнянь у частинних похідних можна, застосовуючи числові методи. Водночас у рівнянні проводять заміну частинних похідних на відношення скінчених різниць, унаслідок чого диференціальні рівняння перетворюються на алгебраїчні різниці.

Найбільш зручним методом числового розв'язання, який дозволяє різко скоротити кількість обчислювальних операцій, є перехід від рівнянь у частинних похідних до системи звичайних диференціальних рівнянь. Перехід здійснюється заміною всіх частинних похідних співвідношенням скінчених різниць, окрім однієї, яка є незалежною змінною в отриманій системі звичайних диференціальних рівнянь.

За такого методу, як і за суто різницевого розв'язування, уся зона, в якій шукається розв'язок, розбивається на низку ділянок. Матеріальні і теплові баланси складаються і розв'язуються для кожної з ділянок послідовно, причому кількість рівнянь у системі відповідає кількості ділянок.

Чим більша кількість ділянок, тим більш наближеною стає математична модель до описуваного фізичного процесу. Однак розв'язання великої кількості рівнянь вимагає великих витрат часу. Здебільшого задовільної точності розв'язку досягають у разі поділу зони існування розв'язку на невелику кількість ділянок. Причому розділення простору зазвичай нерівномірне: ділянок більше там, де градієнт змінювання змінних значний і навпаки. Операція розподілу на ділянки переважно здійснюється за участю технолога — фахівця у сфері модельованого процесу.

Побудуємо математичну модель усього стрижня на підставі математичного опису кожної окремої ділянки. Для виконання цього завдання розділимо стрижень по довжині на окремі ділянки (рис. 5.3).

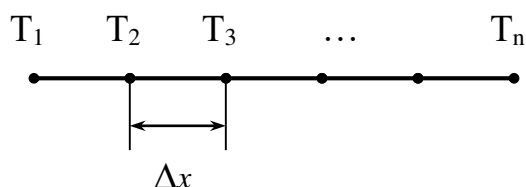


Рис. 5.3. Схема розподілу стрижня на окремі ділянки

Припустимо, що температура всієї ділянки однакова і дорівнює температурі в її центрі. Припустимо також, що стрижень розділений на однакові ділянки, тобто $\Delta x = \text{const}$. При цьому від ділянки $n-1$ до ділянки n в одиницю часу передаватиметься деяка кількість тепла, яку позначимо q_{n-1} (рис. 5.4).

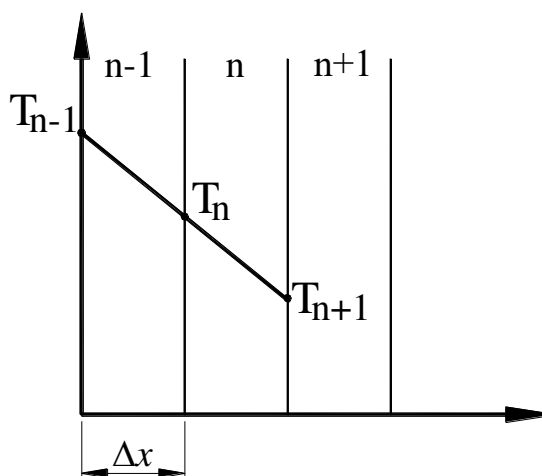


Рис. 5.4. Схема для виведення рівняння теплового балансу стрижня

У результаті цих припущень можна записати рівняння теплового балансу для ділянки n :

$$q_{n-1} = \lambda \cdot \frac{T_{n-1} - T_n}{\Delta x} \quad (5.5)$$

Аналогічно тепловий потік від ділянки $n+1$ до ділянки n можна виразити рівнянням:

$$q_{n+1} = \lambda \cdot \frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta x} \quad (5.6)$$

Швидкість зміни ентальпії в часі дорівнює сумі всіх теплових потоків:

$$\frac{d[c \cdot \rho \cdot \Delta x \cdot T_n]}{dt} = \lambda \cdot \frac{T_{n-1} - T_n}{\Delta x} + \lambda \cdot \frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta x} \quad (5.7)$$

Перетворимо співвідношення (5.7) до вигляду:

$$\frac{d}{dt} T_n = \frac{\lambda}{\rho \cdot c \cdot (\Delta x)^2} [(T_{n-1} - T_n) + (T_{n+1} - T_n)] \quad (5.8)$$

Це рівняння використовується для знаходження температури T_n на ділянці n . Математична модель цього процесу — це система з n -ї кількості диференціальних рівнянь першого порядку.

Рівняння (5.8) можна також отримати, якщо, використовуючи вираз (5.6), перетворити його за такими умовами завдання:

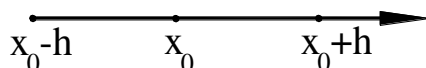
- конвективний теплообмін, пов'язаний з переміщенням теплоносія, відсутній, тобто складова $u_x \frac{\partial t}{\partial x} + u_y \frac{\partial t}{\partial y} + u_z \frac{\partial t}{\partial z} = 0$;

- залежність температури від положення точки в просторі розглядаємо тільки в напрямку осі x , що відповідає умові незначної зміни температури в перерізі стрижня порівняно з його довжиною, тоді складова $\frac{\lambda}{c \cdot \rho} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right)$ перетворюється до вигляду $\frac{\lambda}{c \cdot \rho} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right)$.

Отримуємо рівняння зміни температури по довжині стрижня у часі:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right) \quad (5.9)$$

Застосовуючи метод скінченних різниць, замінюємо похідні скінченими різницями за відповідною координатою. Оскільки температура залежить від часу і лінійної координати, то зміну можна проводити як за різницею справа $x_0 + h$, так і зліва $x_0 - h$ відносно прийнятої умовної точки x_0 , де h — приріст по x :



- права різниця:

$$\frac{\partial T(x_0, t_0)}{\partial x} = \frac{T(x_0+h, t_0) - T(x_0, t_0)}{h}$$

- ліва різниця:

$$\frac{\partial T(x_0, t_0)}{\partial x} = \frac{T(x_0, t_0) - T(x_0-h, t_0)}{h}$$

Отримуємо скінченнорізницеві вирази для перших похідних. Використаємо їх для перетворення других похідних на скінченні різниці.

У разі підстановки правої різниці рівняння для других похідних матимуть вигляд:

$$\frac{\partial^2 T(x_0, t_0)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T(x_0, t_0)}{\partial x} \right) = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial T(x_0+h, t_0)}{\partial x} - \frac{\partial T(x_0, t_0)}{\partial x} \right);$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T(x_0+h, t_0)}{\partial x} &= \frac{T(x_0+2h, t_0) - T(x_0+h, t_0)}{h}, \\
\frac{\partial T(x_0, t_0)}{\partial x} &= \frac{T(x_0+h, t_0) - T(x_0, t_0)}{h}, \\
\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{T(x_0+2h, t_0) - T(x_0+h, t_0) - T(x_0+h, t_0) + T(x_0, t_0)}{h^2} = \\
&= \frac{T(x_0+2h, t_0) - 2T(x_0+h, t_0) + T(x_0, t_0)}{h^2}.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Недоліком цього методу є те, що необхідно знати значення функції в трьох послідовних точках.

Використаємо для другої похідної ліву різницю:

$$\begin{array}{ccc}
x_0 & x_0+h & x_0+2h \\
\bullet & \bullet & \bullet \\
\hline
& \longrightarrow &
\end{array}$$

$$\frac{\partial T(x_0+h, t_0)}{\partial x} = \frac{T(x_0+h, t_0) - T(x_0, t_0)}{h}$$

$$\frac{\partial T(x_0, t_0)}{\partial x} = \frac{T(x_0, t_0) - T(x_0-h, t_0)}{h}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_0, t_0) = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial T(x_0+h, t_0)}{\partial x} - \frac{\partial T(x_0, t_0)}{\partial x} \right] = \frac{1}{h} \left[\frac{T(x_0+h, t_0) - T(x_0, t_0) - T(x_0, t_0) + T(x_0-h, t_0)}{h} \right]$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_0, t_0) = \frac{T(x_0+h, t_0) - 2T(x_0, t_0) + T(x_0-h, t_0)}{h^2}$$

Отримуємо центральний скінченнорізницевий вираз для другої похідної, тобто для пошуку невідомої точки необхідно мати ще два значення, які цю точку оточують:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho} \left[\frac{T(x_0+h, t_0) - 2T(x_0, t_0) + T(x_0-h, t_0)}{h^2} \right] \tag{5.11}$$

Рівняння (5.11) аналогічне отриманому раніше рівнянню (5.10).

Центральна різниця визначає порядок розрахунку других похідних і прийнята як основна для проведення числових розрахунків, оскільки для її обчислення необхідно знати значення, що знаходяться ліворуч і праворуч від точки. Точка, що знаходиться поблизу межі із заданою температурою, є основною для визначення температури у внутрішніх точках.

5.2. Математична модель стаціонарного розподілу температури у поперечному перерізі

Розглянемо процес розподілу температури в плоскому поперечному перерізі стрижня у стаціонарних умовах за такими умовами:

- пластина прогрілася, температурні поля устоялися й не змінюються в часі;
- середовище нерухоме;
- зміною температури по товщині стрижня можна знехтувати.

Рівняння стаціонарного розподілу температури набуває вигляду:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (5.12)$$

У цьому рівнянні немає доданків, які залежать від часу і характеризують відносний рух середовища.

Розглянемо деяку довільну пластину, на гранях якої відомі всі температури. Межові значення можуть бути відомі як Q_i або задані у вигляді деяких функцій ($T=f(y)$), за якими визначають температури в будь-яких вузлах граней (рис. 5.5).

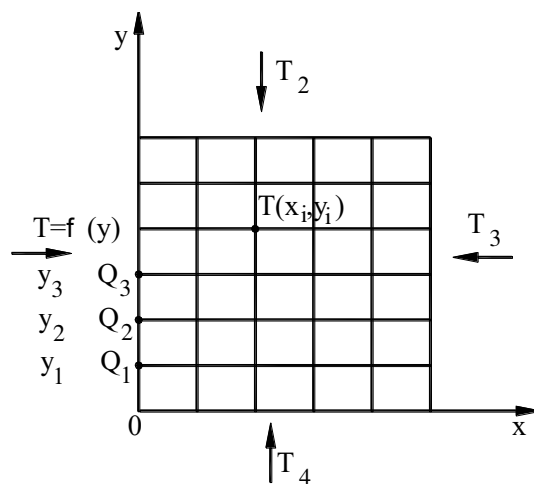


Рис. 5.5. Вплив температури на грані пластини

Межові умови задають розподіл температури по контуру перерізу пластини і є необхідними для розв'язання рівняння (5.12).

Відповідно до скінченнорізницевого методу всю досліджувану зону розбивають на окремі ділянки, тобто будують сітку з вузлами дискретизації. Прийmemo крок розбиття по осі x і позначимо символом h , по осі y — символом l . Температуру в точці з координатами x_i, y_i позначимо $T(x_i, y_i) = T_{ij}$. Відповідно маємо $T(x_i+h, y_i) = T_{i+1,j}$.

Замінімо складову $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ у рівнянні (5.12) на скінченнорізницеві вирази:

$$\frac{T_{i-1,j} + 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{h^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{l^2} = 0 \quad (5.13)$$

Якщо крок розбиття прийняти на всіх напрямках рівним, наприклад $h = 1$, то отримане співвідношення спрощується і температуру в будь-якій точці можна обчислювати за формулою:

$$T_{i,j} = \frac{(T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) + (T_{i,j-1} + T_{i,j+1})}{4} \quad (5.14)$$

З рівняння (5.14) випливає, що для рівномірної сітки температура в певній точці може бути розрахована як середнє значення температур в суміжних вузлах. Отримана прихована схема розрахунку, оскільки невідомі температури визначаються через невідомі в суміжних вузлах. Співвідношення (5.14) необхідно записати для всіх внутрішніх вузлів перерізу. Тобто утвориться система нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно температур у внутрішніх точках.

5.3. Приклади розв'язування завдань

Приклад 5.1. Сталевий стрижень довжиною 20 см і площею поперечного перерізу $0,01 \text{ см}^2$, покритий з трьох боків теплоізоляційним матеріалом. Відкритий кінець стрижня нагрівається постійним джерелом тепла з температурою $T = 80 \text{ }^\circ\text{C}$. Побудувати графік зміни температури по довжині стрижня, якщо його початкова температура становила $22 \text{ }^\circ\text{C}$. Теплоємність сталі — $500 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$, щільність — 7850 кг/м^3 , теплопровідність — $46,5 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$.

Розв'язання з використанням Mathcad 14. Математична модель стрижня в цьому випадку буде системою з n диференціальних рівнянь у частинних похідних. Для розв'язання завдання описаним вище методом розділимо стрижень по довжині на дев'ять окремих однакових ділянок з кроком 2 см. Вважатимемо, що температура кожної ділянки однакова і дорівнює температурі центра ділянки.

Для визначення температури на ділянці використовуємо рівняння (5.11). Математична модель усього стрижня будується на підставі окремого математичного опису кожної з дев'яти ділянок:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T_1 &= a \cdot \frac{d^2}{dl^2} T_1 & \frac{d}{dt} T_4 &= a \cdot \frac{d^2}{dl^2} T_4 & \frac{d}{dt} T_7 &= a \cdot \frac{d^2}{dl^2} T_7 \\ \frac{d}{dt} T_2 &= a \cdot \frac{d^2}{dl^2} T_2 & \frac{d}{dt} T_5 &= a \cdot \frac{d^2}{dl^2} T_5 & \frac{d}{dt} T_8 &= a \cdot \frac{d^2}{dl^2} T_8 \\ \frac{d}{dt} T_3 &= a \cdot \frac{d^2}{dl^2} T_3 & \frac{d}{dt} T_6 &= a \cdot \frac{d^2}{dl^2} T_6 & \frac{d}{dt} T_9 &= a \cdot \frac{d^2}{dl^2} T_9 \end{aligned}$$

Задачу можна розв'язати безпосередньо методом скінченних різниць, але комбінований метод для цього випадку простіший і наочний. Проводимо заміну тільки правих частин рівнянь моделі на скінченні різниці, використовуючи вираз (5.11):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}T_1 &= a \cdot \left(\frac{T_0 - 2 \cdot T_1 + T_2}{h^2} \right) & \frac{d}{dt}T_4 &= a \cdot \left(\frac{T_3 - 2 \cdot T_4 + T_5}{h^2} \right) & \frac{d}{dt}T_7 &= a \cdot \left(\frac{T_6 - 2 \cdot T_7 + T_8}{h^2} \right) \\ \frac{d}{dt}T_2 &= a \cdot \left(\frac{T_1 - 2 \cdot T_2 + T_3}{h^2} \right) & \frac{d}{dt}T_5 &= a \cdot \left(\frac{T_4 - 2 \cdot T_5 + T_6}{h^2} \right) & \frac{d}{dt}T_8 &= a \cdot \left(\frac{T_7 - 2 \cdot T_8 + T_9}{h^2} \right) \\ \frac{d}{dt}T_3 &= a \cdot \left(\frac{T_2 - 2 \cdot T_3 + T_4}{h^2} \right) & \frac{d}{dt}T_6 &= a \cdot \left(\frac{T_5 - 2 \cdot T_6 + T_7}{h^2} \right) & \frac{d}{dt}T_9 &= a \cdot \left(\frac{T_8 - 2 \cdot T_9 + T_{10}}{h^2} \right)\end{aligned}$$

Унаслідок перетворення одержано систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, для розв'язання якої застосуємо метод Ейлера. Вводимо початкові дані для розрахунку в основних одиницях системи СІ:

$$c := 500 \quad \lambda := 46.5 \quad \rho := 7850 \quad b := 2$$

Розраховуємо коефіцієнт теплопровідності стрижня:

$$a := \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \quad a = 1.185 \times 10^{-5}$$

Вводимо крок обчислень, кількість кроків:

$$h := 10 \quad i := 0..20000$$

Визначаємо праві частини диференціальних рівнянь системи для спрощення запису алгоритму розв'язання за методом Ейлера:

$$\begin{aligned}f(T_1, T_2) &:= a \cdot \left(\frac{T_0 - 2 \cdot T_1 + T_2}{b^2} \right) & f(T_6, T_5, T_7) &:= a \cdot \left(\frac{T_5 - 2 \cdot T_6 + T_7}{b^2} \right) \\ f(T_2, T_1, T_3) &:= a \cdot \left(\frac{T_1 - 2 \cdot T_2 + T_3}{b^2} \right) & f(T_7, T_6, T_8) &:= a \cdot \left(\frac{T_6 - 2 \cdot T_7 + T_8}{b^2} \right) \\ f(T_3, T_2, T_4) &:= a \cdot \left(\frac{T_2 - 2 \cdot T_3 + T_4}{b^2} \right) & f(T_8, T_7, T_9) &:= a \cdot \left(\frac{T_7 - 2 \cdot T_8 + T_9}{b^2} \right) \\ f(T_4, T_3, T_5) &:= a \cdot \left(\frac{T_3 - 2 \cdot T_4 + T_5}{b^2} \right) & f(T_9, T_8) &:= a \cdot \left(\frac{T_8 - 2 \cdot T_9 + T_{10}}{b^2} \right) \\ f(T_5, T_4, T_6) &:= a \cdot \left(\frac{T_4 - 2 \cdot T_5 + T_6}{b^2} \right) & & \end{aligned}$$

Вводимо початкові умови:

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ T1_0 \\ T2_0 \\ T3_0 \\ T4_0 \\ T5_0 \\ T6_0 \\ T7_0 \\ T8_0 \\ T9_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 22 \\ 22 \\ 22 \\ 22 \\ 22 \\ 22 \\ 22 \\ 22 \\ 22 \end{pmatrix}$$

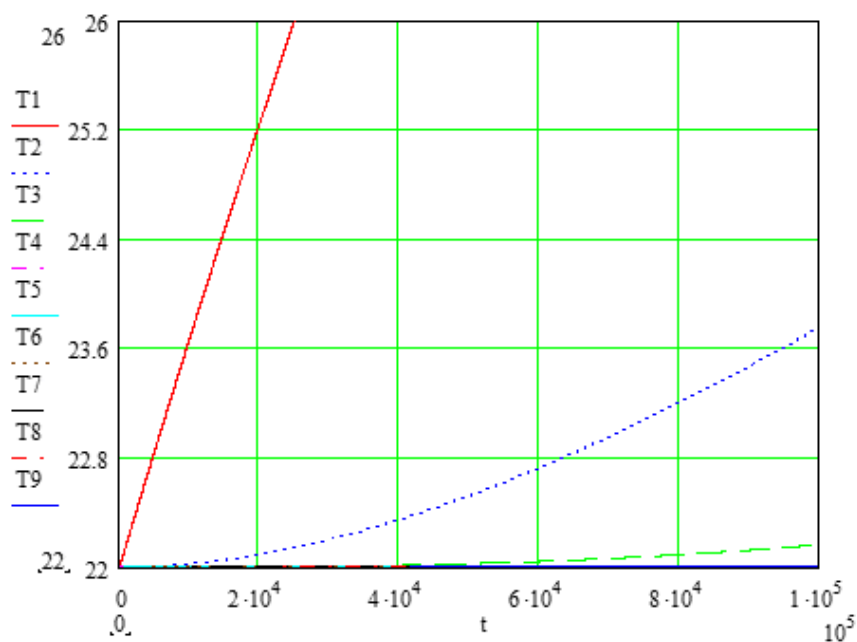
Описуємо схему розрахунку за обраним методом:

$$\begin{pmatrix} t_{i+1} \\ T1_{i+1} \\ T2_{i+1} \\ T3_{i+1} \\ T4_{i+1} \\ T5_{i+1} \\ T6_{i+1} \\ T7_{i+1} \\ T8_{i+1} \\ T9_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t_i + h \\ T1_i + f(T1_i, T2_i, T0) \cdot h \\ T2_i + f(T2_i, T1_i, T3_i) \cdot h \\ T3_i + f(T3_i, T2_i, T4_i) \cdot h \\ T4_i + f(T4_i, T3_i, T5_i) \cdot h \\ T5_i + f(T5_i, T4_i, T6_i) \cdot h \\ T6_i + f(T6_i, T5_i, T7_i) \cdot h \\ T7_i + f(T7_i, T6_i, T8_i) \cdot h \\ T8_i + f(T8_i, T7_i, T9_i) \cdot h \\ T9_i + f(T9_i, T8_i, T9_i) \cdot h \end{pmatrix}$$

Виводимо результати розрахунків у вигляді таблиць, в яких значення температур відповідають ділянці стрижня певної довжини (наприклад, T1 — 2 см, T2 — 4 см, T3 — 6 см, T4 — 8 см і т. д.) у кожний обраний момент часу:

t =		0	T1 =		0	T2 =		0	T3 =		0	T4 =		0
	0	0		0	22		0	22		0	22		0	22
	1	10		1	22.002		1	22		1	22		1	22
	2	20		2	22.003		2	22		2	22		2	22
	3	30		3	22.005		3	22		3	22		3	22
	4	40		4	22.007		4	22		4	22		4	22
	5	50		5	22.009		5	22		5	22		5	22
	6	60		6	22.01		6	22		6	22		6	22
	7	70		7	22.012		7	22		7	22		7	22
	8	80		8	22.014		8	22		8	22		8	22
	9	90		9	22.015		9	22		9	22		9	22
	10	100		10	22.017		10	22		10	22		10	22
	11	110		11	22.019		11	22		11	22		11	22
	12	120		12	22.021		12	22		12	22		12	22
	13	130		13	22.022		13	22		13	22		13	22
	14	140		14	22.024		14	22		14	22		14	22
	15	150		15	22.026		15	22		15	22		15	22

Отримані дані дозволяють побудувати графік зміни температури тільки від часу в кожному обраному поперечному перерізі:



Як і очікувалось, чим ближче поперечний переріз розташований до відкритого кінця, тим швидше вона нагрівається.

Простежити зміну температури по довжині стрижня можна лише за фіксованого значення часу. Для побудови графіка $T = f(l)$ вибираємо довільно час і створюємо матрицю, використовуючи отримані розрахунки.

Наприклад, на кроці $h = 15000$, що відповідає часу 150000 с, шукаємо значення температур, відповідні кожному поперечному перерізу:

$$t_{15000} = 1.5 \times 10^5$$

$$T1_{15000} = 39.524 \quad T2_{15000} = 25.333 \quad T3_{15000} = 22.454 \quad T4_{15000} = 22.048$$

$$T5_{15000} = 22.004 \quad T6_{15000} = 22 \quad T7_{15000} = 22 \quad T8_{15000} = 22 \quad T9_{15000} = 22$$

Далі створюємо дві матриці, позначені як S та $T15000$:

$$S := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \\ 14 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix} \quad T15000 := \begin{pmatrix} 80 \\ 39.524 \\ 25.333 \\ 22.454 \\ 22.048 \\ 22.004 \\ 22 \\ 22 \\ 22 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Матриця S вміщує довжину окремих ділянок, матриця $T15000$ — відповідне значення температури. Аналогічні матриці можна побудувати для будь-якого значення часу. Розподіл температури по стрижню через 15000 і 20000 с після початку нагрівання наведено на рис. 5.6.

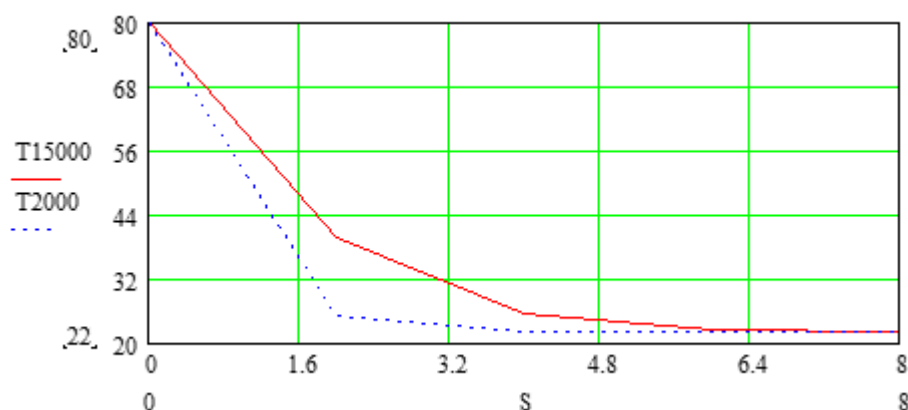


Рис. 5.6. Зміна температури по довжині стрижня для різного часу (до прикладу 5.1): $T15000$ — для 150000 с; $T2000$ — для 20000 с

Приклад 5.2. Визначити температури всередині пластини, зображеної на рис. 5.7. На бічні грані пластини впливають температури, °C: $T_1 = 0$, $T_2 = 70$, $T_3 = 60$, $T_4 = 70$, $T_5 = 100$. Необхідно:

- проаналізувати конструкцію і виявити ті місця, де необхідно визначити значення температури;
- залежно від проведеного аналізу вибрати сітку;
- визначити значення температури у вузлах за межевими умовами:

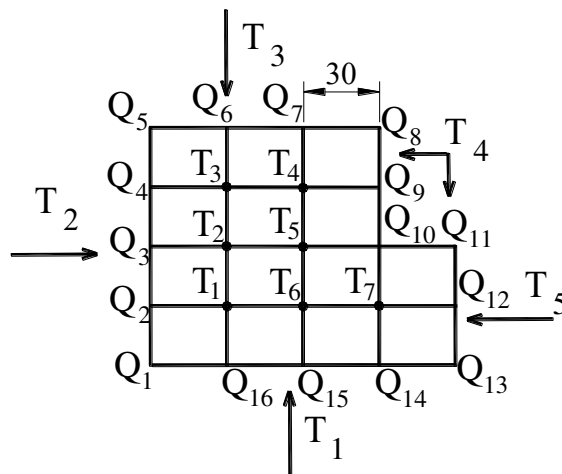


Рис. 5.7. Розподіл температури по пластині (до прикладу 5.2)

Розв'язання за допомогою Mathcad 14. Визначимо значення температури в кутових точках пластини:

$$\begin{aligned}
 T(0,0) &= Q_1 = \frac{T_{r1} + T_{r2}}{2} \\
 T(0,120) &= Q_5 = \frac{T_{r2} + T_{r3}}{2} \\
 T(90,120) &= Q_8 = \frac{T_{r3} + T_{r4}}{2} \\
 T(90,60) &= Q_{10} = T_4 \\
 T(120,60) &= Q_{11} = \frac{T_{r4} + T_{r5}}{2} \\
 T(120,0) &= Q_{13} = \frac{T_{r1} + T_{r5}}{2}
 \end{aligned}$$

Введемо температури граней пластини:

$$TG1:=0 \quad TG2:=70 \quad TG3:=60 \quad TG4:=70 \quad TG5:=100$$

Запишемо скінченнорізницеві вирази відносно внутрішніх вузлів. Якщо вибрана рівномірна сітка, то відповідно до співвідношення (5.14) отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4T_1 = Q_2 + Q_{16} + T_2 + T_6 \\ 4T_2 = Q_3 + T_1 + T_5 + T_3 \\ 4T_3 = Q_4 + Q_6 + T_2 + T_4 \\ 4T_4 = Q_7 + Q_9 + T_3 + T_5 \\ 4T_5 = T_2 + Q_{10} + T_4 + T_6 \\ 4T_6 = Q_{15} + T_1 + T_5 + T_7 \\ 4T_7 = Q_{14} + Q_{10} + Q_{12} + T_6 \end{cases} \quad (5.15)$$

Кількість рівнянь відповідає кількості невідомих температур. Розрахуємо температури в зовнішніх вузлах у Mathcad 14 і отримаємо результати:

$$Q1 := \frac{TG1 + TG2}{2}$$

$$Q2 := TG2$$

$$Q3 := TG2$$

$$Q4 := TG2$$

$$Q5 := \frac{TG2 + TG3}{2}$$

$$Q6 := TG3$$

$$Q7 := TG3$$

$$Q8 := \frac{TG4 + TG3}{2}$$

$$Q9 := TG4$$

$$Q10 := TG4$$

$$Q11 := \frac{TG4 + TG5}{2}$$

$$Q12 := TG5$$

$$Q13 := \frac{TG1 + TG5}{2}$$

$$Q14 := TG1$$

$$Q15 := TG1$$

$$Q16 := TG1$$

$$Q1=35$$

$$Q2=70$$

$$Q3=70$$

$$Q4=70$$

$$Q5=65$$

$$Q6=60$$

$$Q7=60$$

$Q_8=65$
 $Q_9=70$
 $Q_{10}=70$
 $Q_{11}=85$
 $Q_{12}=100$
 $Q_{13}=50$
 $Q_{14}=0$
 $Q_{15}=0$
 $Q_{16}=0$

Отримані температури на кожній ділянці бокових граней Q_i є коефіцієнтами для рівнянь системи (5.15).

Систему лінійних рівнянь (5.15) розв'яжемо за допомогою обчислювального блоку *Given-Find* (рис. 5.8).

Результати обчислення отримаємо у вигляді матриці z :

$$z = \begin{pmatrix} 41.296 \\ 57.671 \\ 62.504 \\ 62.347 \\ 56.883 \\ 37.515 \\ 51.879 \end{pmatrix}$$

$$\underline{T1} := 0 \quad \underline{T2} := 0 \quad \underline{T3} := 0 \quad \underline{T4} := 0 \quad \underline{T5} := 0 \quad T6 := 0 \quad T7 := 0$$

Given

$$4 \cdot T1 = Q2 + Q16 + T2 + T6$$

$$4 \cdot T2 = Q3 + T1 + T5 + T3$$

$$4 \cdot T3 = Q4 + Q6 + T2 + T4$$

$$4 \cdot T4 = Q7 + Q9 + T3 + T5$$

$$4 \cdot T5 = T2 + Q10 + T4 + T6$$

$$4 \cdot T6 = Q15 + T1 + T5 + T7$$

$$4 \cdot T7 = Q14 + Q10 + Q12 + T6$$

$$z := \text{Find}(T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7)$$

Рис. 5.8. Запис обчислювального блоку *Given-Find*, де температури у внутрішніх точках пластини надані відповідно до тієї послідовності, яка записана у *Find*, тобто $T1 = 41,296$ °C, $T2 = 57,671$ °C, $T3 = 62,504$ °C, $T4 = 62,347$ °C, $T5 = 56,883$ °C, $T6 = 37,515$ °C, $T7 = 51,879$ °C

Систему лінійних рівнянь (5.15) також можна розв'язати матричним способом, записавши її як $k \cdot t = S$, де k — матриця коефіцієнтів; t — стовпець шуканих величин; S — стовпець правих частин.

Для розв'язання системи (5.15) у матричний спосіб необхідно перетворити її до такого вигляду:

$$\begin{cases} 4T_1 - T_2 - T_6 = Q_2 + Q_{16} \\ 4T_2 - T_1 - T_5 - T_3 = Q_3 \\ 4T_3 - T_2 - T_4 = Q_4 + Q_6 \\ 4T_4 - T_3 - T_5 = Q_7 + Q_9 \\ 4T_5 - T_4 - T_6 - T_2 = Q_{10} \\ 4T_6 - T_1 - T_5 - T_7 = Q_{15} \\ 4T_7 - T_6 = Q_{14} + Q_{10} + Q_{12} \end{cases} \quad (5.16)$$

Тоді елементи матриць K і t записуємо так:

$$k := \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad S := \begin{pmatrix} Q_2 + Q_{16} \\ Q_3 \\ Q_4 + Q_6 \\ Q_7 + Q_9 \\ Q_{10} \\ Q_{15} \\ Q_{14} + Q_{10} + Q_{12} \end{pmatrix}$$

Отримуємо результати обчислення:

$$t := \text{lsolve}(k, S)$$

$$t = \begin{pmatrix} 40.489 \\ 57.205 \\ 62.322 \\ 62.083 \\ 56.009 \\ 34.749 \\ 42.5 \end{pmatrix},$$

які за деякими позиціями відрізняються від наведених раніше, що пояснюється використанням різних способів розв'язування.

Розв'язання системи рівнянь (5.15) засобами MS Excel. Розглянемо розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою надбудови Пошук рішення. Вводимо в робоче поле MS Excel значення розрахованих температур на зовнішніх вузлах пластини:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
2	35	70	70	70	65	60	60	65
3	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	Q16
4	70	70	85	100	50	0	0	0
5								

Записуємо систему відповідно до вимог MS Excel:

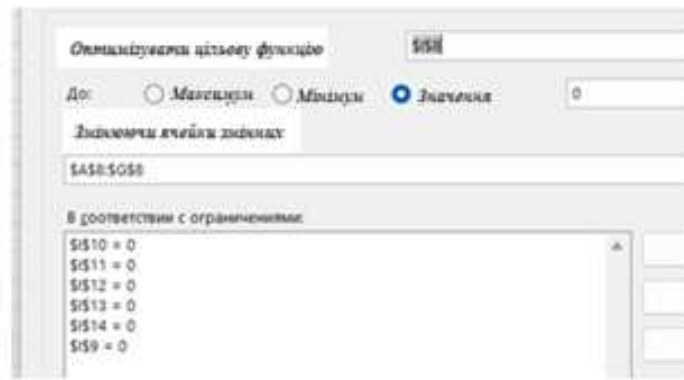
H4 $\times$ $\checkmark$ f_x $=4*A8-B8-F8-B2-H4$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8		
2	35	70	70	70	65	60	60	65		
3	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	Q16		
4	70	70	85	100	50	0	0	0		
5										
6										
7	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7			
8									рівняння	
9									$=4*A8-B8-F8-B2-H4$	
10										

I14 $\times$ $\checkmark$ f_x $=4*G8-F8-F4-B4-D4$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8		
2	35	70	70	70	65	60	60	65		
3	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	Q16		
4	70	70	85	100	50	0	0	0		
5										
6										
7	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7		рівняння	
8									-70	
9									-70	
10									-130	
11									-130	
12									-70	
13									0	
14									-170	
15										

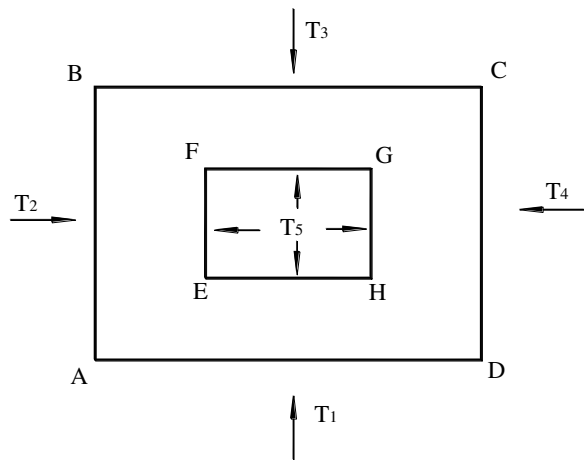
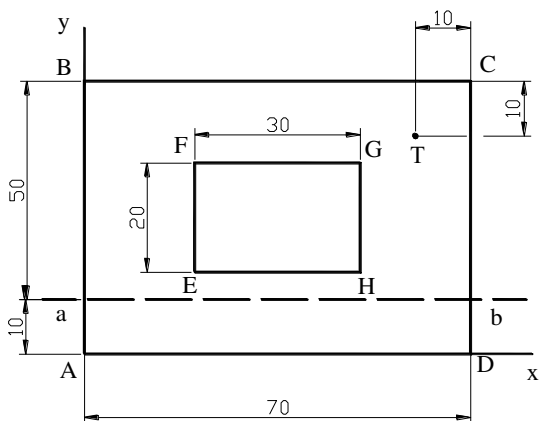
і заповнюємо відповідні поля у *Пошуку рішення*:



Отримуємо значення шуканих параметрів, які співпадають з результатами розрахунку в Mathcad 14:

7	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7		рівняння
8	41,29638	57,67099	62,50447	62,34689	56,8831	37,51453	51,87863		0
9									0
10									1,14E-13
11									0
12									0
13									1,42E-14
14									0

Приклад 5.3. По трубі прямокутного перерізу протікає гаряча рідина ($T_5 = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$). Труба нижньою гранню лежить на крижаній ванні так, що температура цієї грані дорівнює $T_1 = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ (рис. 5.9). Верхня площина труби знаходиться за сталої температури $T_3 = 60\text{ }^{\circ}\text{C}$. На бічних гранях температури дорівнюють $T_2 = 70\text{ }^{\circ}\text{C}$, $T_4 = 70\text{ }^{\circ}\text{C}$.



а) б)
Рис. 5.9. Схема труби прямокутного перетину:
а) переріз труби; б) температури на межах

Необхідно:

1. Розробити математичну модель розповсюдження температури по перерізу труби.

2. За допомогою моделі побудувати графік зміни температури уздовж лінії $a-b$ перерізу труби.

3. Варіюючи значення температури T_4 грані CD у межах від 70 до 160 °C з кроком 10 °C, розрахувати значення температури в точці T. Результати розрахунків занести в таблицю і побудувати графік.

4. Підібрати температуру рідини на грані, що забезпечує температуру в точці T у межах від 90 до 92 °C.

Розв'язання за допомогою Mathcad 14. Для розроблення математичної моделі розбиваємо всю досліджувану зону на окремі ділянки так, щоб вузли дискретизації потрапили на лінію і в точку визначуваних значень температур. Для виконання цієї умови необхідно крок дискретизації вибрати однаковий як по осі x , так і по осі y (крок дискретизації = 10). Розрахункова схема наведена на рис. 5.10. Таким чином маємо 18 внутрішніх вузлів, у яких необхідно буде визначити температури.

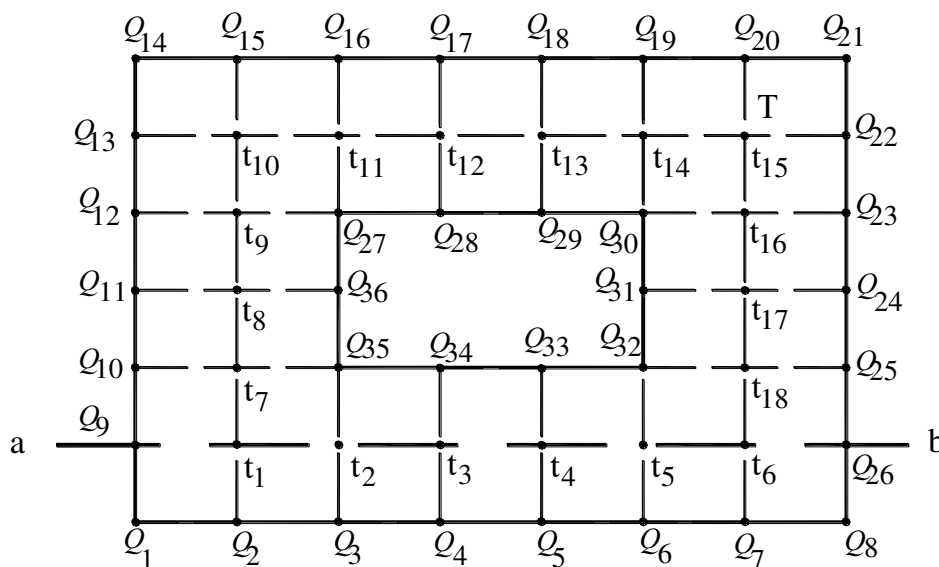


Рис. 5.10. Розрахункова схема перерізу прямокутної труби (до прикладу 5.2)

У цьому завданні невідомими величинами є $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{18}$. Температури $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_{36}$ визначаються з граничних умов.

Визначимо значення температур у вузлових точках і на межах труби:

$$Q_1 = \frac{T_1 + T_2}{2} = 35$$

$$Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = Q_7 = T_1 = 0$$

$$Q_8 = \frac{T_1 + T_4}{2} = 35$$

$$Q_9 = Q_{10} = Q_{11} = Q_{12} = Q_{13} = T_2 = 70$$

$$Q_{14} = \frac{T_2 + T_3}{2} = 65$$

$$Q_{15} = Q_{16} = Q_{17} = Q_{18} = Q_{19} = Q_{20} = T_3 = 60$$

$$Q_{21} = \frac{T_3 + T_4}{2} = 65$$

$$Q_{22} = Q_{23} = Q_{24} = Q_{25} = Q_{26} = T_4 = 70$$

$$Q_{27} = Q_{28} = Q_{29} = Q_{30} = Q_{31} = Q_{32} =$$

$$= Q_{33} = Q_{34} = Q_{35} = Q_{36} = T_5 = 100$$

Запишемо рівняння для визначення значення температур у внутрішніх точках:

$$4t_1 = t_2 + t_7 + Q_2 + Q_9$$

$$4t_2 = t_1 + t_3 + Q_3 + Q_{35}$$

$$4t_3 = t_2 + t_4 + Q_4 + Q_{34}$$

$$4t_4 = t_3 + t_5 + Q_5 + Q_{33}$$

$$4t_5 = t_4 + t_6 + Q_6 + Q_{32}$$

$$4t_6 = t_5 + t_{18} + Q_{26} + Q_7$$

$$4t_7 = t_1 + t_8 + Q_{10} + Q_{35}$$

$$4t_8 = t_7 + t_9 + Q_{11} + Q_{36}$$

$$4t_9 = t_8 + t_{10} + Q_{12} + Q_{27}$$

$$4t_{10} = t_9 + t_{11} + Q_{13} + Q_{15}$$

$$4t_{11} = t_{10} + t_{12} + Q_{16} + Q_{27}$$

$$4t_{12} = t_{11} + t_{13} + Q_{17} + Q_{28}$$

$$4t_{13} = t_{12} + t_{14} + Q_{18} + Q_{29}$$

$$4t_{14} = t_{13} + t_{15} + Q_{19} + Q_{30}$$

$$4t_{15} = t_{14} + t_{16} + Q_{20} + Q_{22}$$

$$4t_{16} = t_{15} + t_{17} + Q_{30} + Q_{23}$$

$$4t_{17} = t_{16} + t_{18} + Q_{31} + Q_{24}$$

$$4t_{18} = t_6 + t_{17} + Q_{25} + Q_{32}$$

Для розв'язання отриманої системи рівнянь застосовуємо обчислюваний блок *Given-Find*.

Попередньо вводимо відомі температури:

$T_1 := 0$	$T_2 := 70$	$T_3 := 60$	$T_4 := 70$	$T_5 := 100$	$Q_1 := 35$	$Q_2 := 0$
$Q_3 := 0$	$Q_4 := 0$	$Q_5 := 0$	$Q_6 := 0$	$Q_7 := 0$	$Q_8 := 35$	$Q_9 := 70$
$Q_{10} := 70$	$Q_{11} := 70$	$Q_{12} := 70$	$Q_{13} := 70$	$Q_{14} := 65$	$Q_{15} := 60$	$Q_{16} := 60$
$Q_{17} := 60$	$Q_{18} := 60$	$Q_{19} := 60$	$Q_{20} := 60$	$Q_{21} := 65$	$Q_{22} := 70$	$Q_{23} := 70$
$Q_{24} := 70$	$Q_{25} := 70$	$Q_{26} := 70$	$Q_{27} := 100$	$Q_{28} := 100$	$Q_{29} := 100$	$Q_{30} := 100$
$Q_{31} := 100$	$Q_{32} := 100$	$Q_{33} := 100$	$Q_{34} := 100$	$Q_{35} := 100$	$Q_{36} := 100$	

Далі надаємо початкові наближення змінним:

$$\begin{aligned} t1 &:= 0 & t2 &:= 0 & t3 &:= 0 & t4 &:= 0 & t5 &:= 0 & t6 &:= 0 & t7 &:= 0 \\ t8 &:= 0 & t9 &:= 0 & t10 &:= 0 & t11 &:= 0 & t12 &:= 0 & t13 &:= 0 & t14 &:= 0 \\ t15 &:= 0 & t16 &:= 0 & t17 &:= 0 & t18 &:= 0 \end{aligned}$$

Записуємо систему рівнянь у обчислювальний блок:

Given

$$\begin{aligned} 4 \cdot t1 &= Q2 + Q9 + t2 + t7 & 4 \cdot t10 &= Q13 + Q15 + t9 + t11 \\ 4 \cdot t2 &= Q3 + Q35 + t1 + t3 & 4 \cdot t11 &= Q16 + Q27 + t10 + t12 \\ 4 \cdot t3 &= Q4 + Q34 + t2 + t4 & 4 \cdot t12 &= Q17 + Q28 + t11 + t13 \\ 4 \cdot t4 &= Q5 + Q33 + t3 + t5 & 4 \cdot t13 &= Q18 + Q29 + t12 + t14 \\ 4 \cdot t5 &= Q6 + Q32 + t4 + t6 & 4 \cdot t14 &= Q19 + Q30 + t13 + t15 \\ 4 \cdot t6 &= Q26 + t5 + t18 + Q7 & 4 \cdot t15 &= Q20 + t14 + t16 + Q22 \\ 4 \cdot t7 &= t1 + t8 + Q10 + Q35 & 4 \cdot t16 &= t15 + t17 + Q30 + Q23 \\ 4 \cdot t8 &= t7 + t9 + Q11 + Q36 & 4 \cdot t17 &= t16 + t18 + Q31 + Q24 \\ 4 \cdot t9 &= t8 + t10 + Q12 + Q27 & 4 \cdot t18 &= t6 + t17 + Q25 + Q32 \end{aligned}$$

$$z := \text{Find}(t1, t2, t3, t4, t5, t6, t7, t8, t9, t10, t11, t12, t13, t14, t15, t16, t17, t18)$$

Виводимо в робоче поле результат обчислення:

	0
0	48.669
1	49.637
2	49.879
3	49.879
4	49.637
5	48.669
6	75.04
z = 7	81.491
8	80.922
9	72.199
10	77.872
11	79.291
12	79.291
13	77.872
14	72.199
15	...

Для побудови графіка розподілу температур вздовж лінії $a-b$ вводимо матрицю tab , елементам якої привласнюємо значення температур вузлів, що лежать на зазначеній лінії — $Q9$, $t1$, $t2$, $t3$, $t4$, $t5$, $t6$, $t8$:

$$tab := \begin{pmatrix} 70 \\ 48.669 \\ 49.637 \\ 49.879 \\ 49.879 \\ 49.637 \\ 48.669 \\ 81.491 \end{pmatrix}$$

Графік зміни температури вздовж лінії $a-b$ наведено на рис. 5.11.

$i := 1..8$

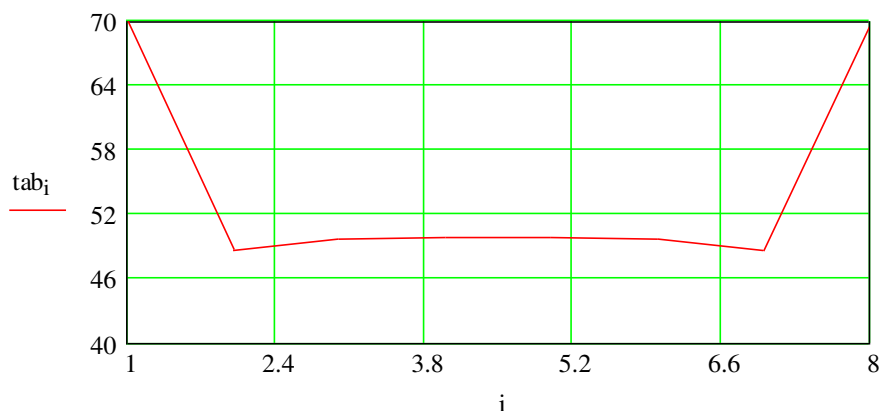


Рис. 5.11. Графік зміни температури уздовж лінії $a-b$ (до прикладу 5.2)

Проаналізуємо вплив зростання температури грані CD на температуру в точці T . Для цього будемо змінювати значення температури $T4$ від 70 до 160 °C з кроком 10 °C і для кожного значення розраховувати температуру точки T ($t15$). Результати розрахунків заносимо в таблицю 5.1.

Таблиця 5.1

$T4$	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160
$t15$	72,199	76,137	80,075	84,012	87,95	91,88	95,826	99,764	103,702	107,64

За даними таблиці побудуємо графік (рис. 5.12):

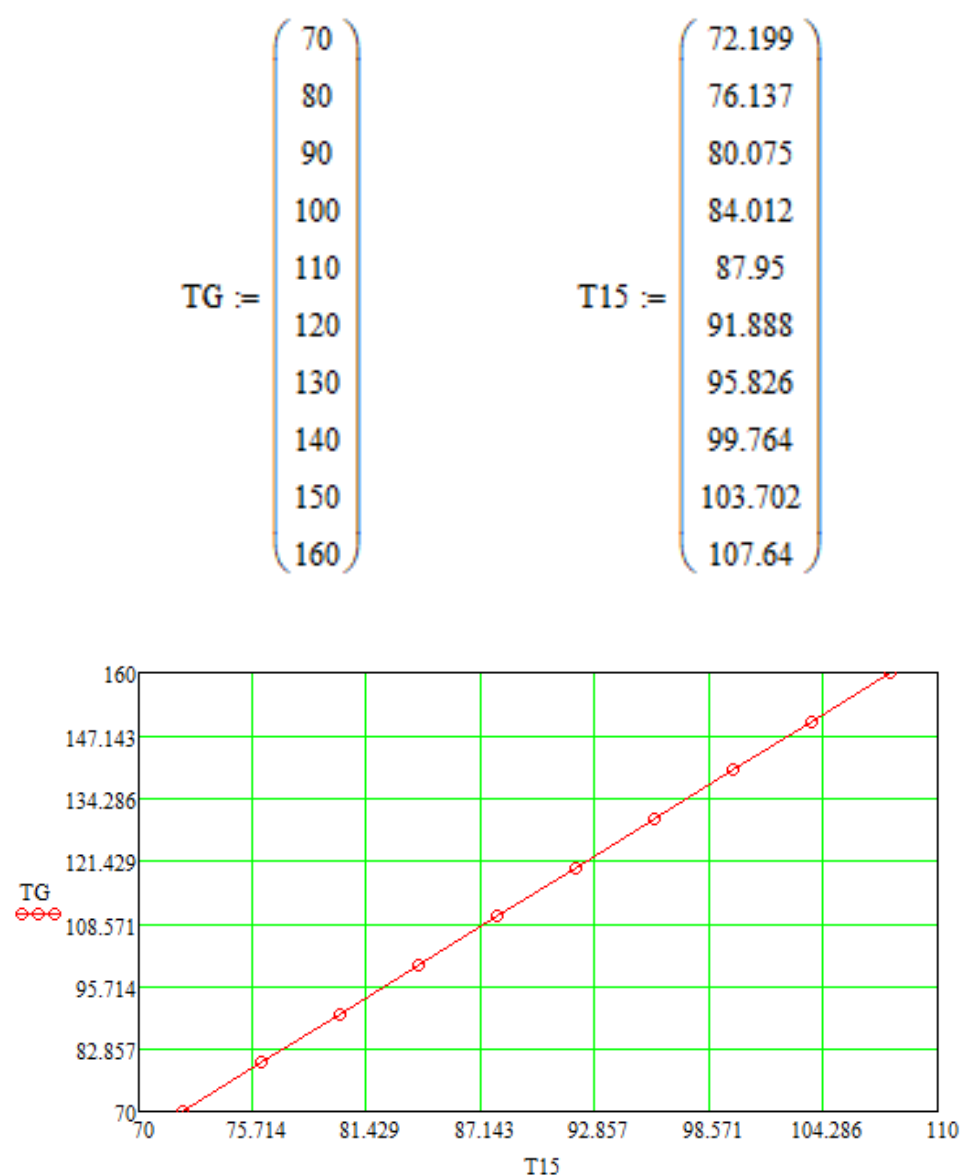


Рис. 5.12. Вплив зростання температури грані $C-D$ (TG) на температуру в точці T (T15) (до прикладу 5.2)

Визначимо температур рідини ($T5$), що забезпечує температуру в точці T у межах від 90 до 92 °C. Для виконання цього завдання варіюємо значення температури $T5$ і для кожного з них за допомогою моделі визначаємо температуру в точці T . З розрахунків виходить, що за температури $T5 = 190$ °C температура в точці T складе 91,35 °C.

Питання для самоконтролю

1. Назвіть основні рівняння, що описують процес перенесення тепла.
2. Запишіть рівняння Фур'є-Кірхгофа.
3. Назвіть способи розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних.
4. Отримайте скінченнорізницевий вираз для першої похідної.
5. Як отримати центральні скінченнорізницеві вирази для другої похідної.
6. Складіть тепловий баланс для n -ї ділянки металевого стрижня.
7. Запишіть рівняння стаціонарного розподілу температури в плоскому перерізі.
8. Складіть алгоритм розв'язання системи лінійних рівнянь в Mathcad 14.

6. МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ МАСОПЕРЕДАЧІ

6.1. Масопередача без хімічної взаємодії

Клас дифузійних (масообмінних) процесів пов'язаний з перенесенням речовини з однієї фази в іншу (абсорбція, адсорбція, десорбція, дистиляція і ректифікація, розчинення, кристалізація, зволоження, сушіння, сублімація, іонний обмін тощо). Швидкість дифузійних процесів визначають за законами масопереносу.

Перенесення однієї речовини в межах однієї фази здійснюється за рахунок молекулярної і конвективної дифузії. Молекулярна дифузія здійснюється без видимого переміщення ділянок фази й обумовлена тепловим рухом молекул. Еквімолекулярне перенесення речовини за рахунок молекулярної дифузії описується рівнянням Фіка:

$$q = -D \frac{\partial C}{\partial x} F. \quad (6.1)$$

Потік речовини пропорційний градієнту концентрації компонента до шару товщиною x і поверхні F . Коефіцієнт пропорційності D називається коефіцієнтом молекулярної дифузії. За постійності градієнта концентрацій рівняння Фіка набуває виду залежності:

$$q = -\frac{D}{h} \cdot \Delta C \cdot F. \quad (6.2)$$

У рухомій фазі перенесення речовини здійснюється також за рахунок конвекції, тобто шляхом відносного переміщення окремих елементів потоків.

Процес перенесення компонента від межі до ядра фази характеризується рівнянням Ньютона–Щукарева:

$$q = -\beta(C - C^{rp})F, \quad (6.3)$$

де $(C - C^{rp})$ — різниця концентрацій у ядрі і на межі; β — коефіцієнт масовіддачі у фазі.

Коефіцієнт β є складною функцією, залежною від багатьох параметрів. Конвективний масоперенос описується системою, що складається з рівнянь Нав'є-Стокса і нерозривності потоку, рівняння конвективної дифузії компонента (другий закон Фіка $\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right)$), яке є рівнянням матеріального

балансу за компонентом для нескінченно малого об'єму в рухомому потоці, а також початкових і граничних умов.

Рівняння конвективної дифузії:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} u_x + \frac{\partial c}{\partial y} u_y + \frac{\partial c}{\partial z} u_z = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) \quad (6.4)$$

за формою аналогічне рівнянню Фур'є–Кірхгофа для конвективного теплопереносу. Залежність $\beta \cdot \Delta c = -D \frac{\partial c}{\partial h} |_{h=0}$ визначає граничні умови процесу в припущенні, що на межі фази існує дифузійний шар товщиною h , перенесення речовини через який здійснюється тільки молекулярною дифузією.

6.2. Складання і аналіз математичного опису хімічних процесів у системі «газ — рідина» (рідина — рідина)

Газорідинні реакції — це гетерогенні процеси, що припускають взаємодію між реагентами, один з яких знаходиться в газовій фазі, інший — у рідкій. Рідина може бути розчином речовини, що хімічно взаємодіє з газоподібним реагентом. Також можуть взаємодіяти розчинювальний газ і сам розчинник.

Газорідинні реакції розглядають як процеси абсорбції, що супроводжується хімічною взаємодією. Такий підхід дозволяє застосувати до цієї групи хімічних процесів закономірності масопередачі. Водночас вважають, що перебіг хімічної реакції на межі розділу газової і рідкої фаз або в глибині рідкої фази прискорює процес поглинання газоподібного компонента рідиною.

Зміна концентрації компонента C_i визначається швидкістю дифузії речовини і швидкістю його витрати за рахунок хімічної взаємодії. Рівняння молекулярної і конвективної дифузії під час перебігу хімічних реакцій набувають, відповідно, вигляду:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) \pm W_p \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial c}{\partial x} u_x - \frac{\partial c}{\partial y} u_y - \frac{\partial c}{\partial z} u_z \pm W_p \quad (6.6)$$

Точне розв'язання цих рівнянь можливе для стаціонарних умов у нерухомому середовищі або ламінарному потоці за постійного коефіцієнта дифузії і лінійного характеру залежності швидкості хімічної реакції від концентрації речовини, тобто для реакцій першого порядку. Крім того, для розв'язання рівняння (6.6) потрібне знання розподілу швидкості потоку в межевому шарі. Останню умову виконати особливо важко, тому знайти розв'язок рівнянь дифузійної кінетики вдається тільки для деяких простих випадків.

6.3. Приклади розв'язування завдань

Приклад 6.1. Скільки часу необхідно, щоб на відстані $5 \cdot 10^{-6}$ м від межі розділу фаз в плівці рідини завтовшки $1 \cdot 10^{-5}$ м концентрація розчинного газоподібного компонента досягла значення $2 \cdot 10^{-3}$ моль/л. Процес хемосорбції супроводжується хімічною реакцією з кінетичним рівнянням $r = 90C_A$. Коефіцієнт дифузії речовини A в рідині $DA = 1,8 \cdot 10^{-6}$ м²/с. Концентрація A на межі розділу фаз на початку процесу $CA^* = 0,12$ кмоль/м³. Реакція закінчується у межах плівки рідини.

Розв'язання за допомогою Mathcad 14. Для розв'язання завдання необхідно проаналізувати рівняння, що характеризує зміну концентрації газоподібного компонента A в часі залежно від глибини проникнення у рідку фазу і від швидкості хімічної взаємодії:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} - k \cdot C_A^2$$

Це рівняння з математичного погляду є диференціальним рівнянням у частинних похідних. Для його розв'язання скористаємося методом сіток, що дозволить перейти до системи звичайних диференціальних рівнянь, де незалежною змінною буде тільки час.

Розіб'ємо зону плівки на 2 ділянки з кроком $h = 5 \cdot 10^{-6}$ м по осі x . Крок за часом приймемо рівним $b = 10^{-10}$ (рис. 6.1). За таких умов переріз C_{22} відповідає відстані $5 \cdot 10^{-6}$ м від межі розділу фаз у досліджувані моменти часу. Прослідкуємо зміну концентрації речовини A в цьому перерізі у часі. Для цього числовим методом Ейлера розв'яжемо рівняння:

$$\frac{dC_{A22}}{dt} = \frac{D}{h^2} (CA_{12} + CA_{32} - 2CA_{22}) - 90 \cdot CA_{22}^2$$

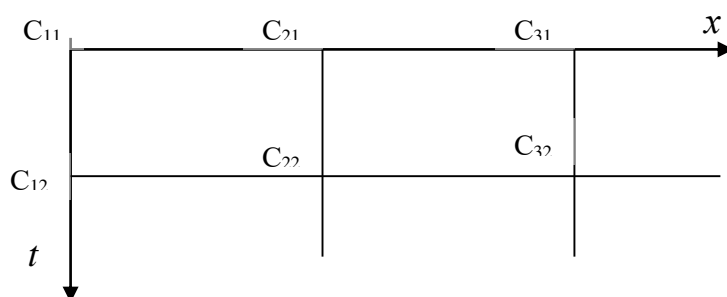


Рис. 6.1. Фрагмент сітки значень концентрацій (до прикладу 6.1)

Визначимо граничні умови: $CA(12) = CA^*$; $CA(32) = 0$

Задаємо початкові умови: $CA(21) = 0$; $CA(31) = 0$.

Введемо в робоче поле початкові дані:

$$CA12 := 0.12$$

$$CA32 := 0$$

$$D := 1.8 \cdot 10^{-6}$$

$$h := 5 \cdot 10^{-6}$$

$$b := 10^{-10}$$

$$N := 3000$$

$$i := 0..N$$

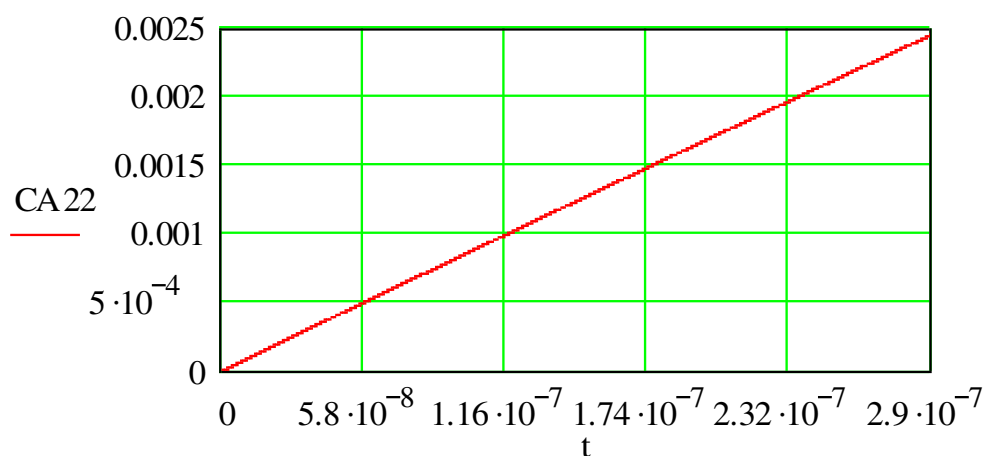
Запишемо рівняння, за яким проводитимемо розрахунок:

$$F(CA22) := \frac{D}{h^2} \cdot (CA12 + CA32 - 2 \cdot CA22) - 90 \cdot (CA22)^2$$

Розрахунок рівняння проведемо числовим методом Ейлера. Для цього визначимо початкові умови:

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ CA22_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} t_{i+1} \\ CA22_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t_i + b \\ CA22_i + F(CA22_i) \cdot b \end{pmatrix}$$

Результати обчислень представимо у вигляді графіка:



Шукане значення часу можна визначити приблизно за графіком, а точне значення — з таблиць:

	0		0
2346	$1.993 \cdot 10^{-3}$	2346	$2.346 \cdot 10^{-7}$
2347	$1.994 \cdot 10^{-3}$	2347	$2.347 \cdot 10^{-7}$
2348	$1.995 \cdot 10^{-3}$	2348	$2.348 \cdot 10^{-7}$
2349	$1.996 \cdot 10^{-3}$	2349	$2.349 \cdot 10^{-7}$
2350	$1.996 \cdot 10^{-3}$	2350	$2.35 \cdot 10^{-7}$
2351	$1.997 \cdot 10^{-3}$	2351	$2.351 \cdot 10^{-7}$
2352	$1.998 \cdot 10^{-3}$	2352	$2.352 \cdot 10^{-7}$
CA22 = 2353	$1.999 \cdot 10^{-3}$	t = 2353	$2.353 \cdot 10^{-7}$
2354	$2 \cdot 10^{-3}$	2354	$2.354 \cdot 10^{-7}$
2355	$2.001 \cdot 10^{-3}$	2355	$2.355 \cdot 10^{-7}$
2356	$2.001 \cdot 10^{-3}$	2356	$2.356 \cdot 10^{-7}$
2357	$2.002 \cdot 10^{-3}$	2357	$2.357 \cdot 10^{-7}$
2358	$2.003 \cdot 10^{-3}$	2358	$2.358 \cdot 10^{-7}$
2359	$2.004 \cdot 10^{-3}$	2359	$2.359 \cdot 10^{-7}$
2360	$2.005 \cdot 10^{-3}$	2360	$2.36 \cdot 10^{-7}$
2361	$2.006 \cdot 10^{-3}$	2361	$2.361 \cdot 10^{-7}$

Отже, за $t = 2,354 \cdot 10^{-7}$ год концентрація СА досягає значення 2354 кмоль/м³.

Приклад 6.2. Визначити концентрацію газу всередині плівки рідини в результаті перебігу процесу хемосорбції. Кінетичне рівняння хімічної реакції $r = 49 \cdot C_A$ кмоль/(м³ · с), коефіцієнт дифузії $D = 2,55 \cdot 10^{-9}$ м²/с, концентрація А на межі розділу фаз $C_A^* = 0,001$ кмоль/м³, товщина плівки $h = 0,1 \cdot 10^{-4}$ м. Для розрахунку користуватися рівнянням:

$$\frac{dC_A}{dx} = - \frac{C_A^* \sqrt{k}}{tha}$$

Розв'язання за допомогою Mathcad 14. Застосуємо числовий метод розв'язання рівняння, що характеризує зміну концентрації компонента А по глибині плівки рідини в результаті перебігу хімічної реакції у стаціонарних умовах:

$$\frac{d^2 C_A}{dx^2} = \frac{k}{D} C_A$$

Від рівняння другого порядку перейдемо до системи двох рівнянь першого порядку. Для цього зробимо заміну змінних.

Позначимо:

$y1$ — концентрація розчиненого газу в рідині ($y1 = C_A$);

$y2$ — зміна концентрації газу по глибині плівки ($y2 = \frac{dC_A}{dx}$).

Початкове рівняння другого порядку представимо системою рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dC_A}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = \frac{k}{D} \cdot y_1 \end{cases}$$

Для її вирішення необхідно задати початкові умови:

$$C_A \Big|_{x=0} = C_A^*$$

і згідно даному в умові завдання рівнянню для умов $CA_0 = 0$ і $x = 0$:

$$\frac{dC_A}{dx} \Big|_{x=0} = - \frac{C_A^* \sqrt{\frac{k}{D}}}{tha},$$

$$\text{де } a = h \sqrt{\frac{k}{D}}, \quad tha = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}}.$$

Проведемо необхідні обчислення коефіцієнтів:

$$a = h \sqrt{\frac{k}{D}} = 0,1 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{\frac{49}{2,55 \cdot 10^{-9}}} = 1,386$$

$$tha = \frac{e^{1,386} - e^{-1,386}}{e^{1,386} + e^{-1,386}} = 0,882$$

Тоді

$$\frac{dC_A}{dx} = - \frac{0,001 \cdot \sqrt{\frac{49}{2,55 \cdot 10^{-9}}}}{0,882} = - 157,16$$

Реалізуємо алгоритм розв'язання системи диференціальних рівнянь числовим методом Рунге-Кутта за допомогою вбудованої підпрограми *rkfixed*:

ORIGIN :=1

Введемо початкові дані:

k :=49

D:=2.55·10⁻⁹

Xn :=0

Xk := 0.1·10⁻⁴

Початкові умови:

$$Y := \begin{pmatrix} 0,001 \\ -157,16 \end{pmatrix}$$

Праві частини наведеної системи рівнянь:

$$A(X, Y) := \begin{bmatrix} Y_2 \\ \frac{k}{D} \cdot Y_1 \end{bmatrix}$$

Звернення до стандартної функції інтегрування системи диференціальних рівнянь *rkfixed*:

$$Z := \text{rkfixed}(Y, Xn, Xk, N, A),$$

де Y — стовпчик невідомих (перед зверненням їм мають бути задані початкові значення); Xn — початкове значення X інтеграції системи; Xk — кінцеве значення X ; N — число ділянок розподілу інтервалу інтеграції; A — стовпець правих частин наведеної системи рівнянь; Z — матриця розв'язків системи рівнянь; 1-й стовпець — дискретні значення, у яких визначимо рішення; 2-й стовпець — значення невідомої Y_1 ; 3-й стовпець — значення невідомої Y_2 .

Графік зміни концентрації розчиненого компонента по глибині плівки рідини наведено на рис. 6.2.

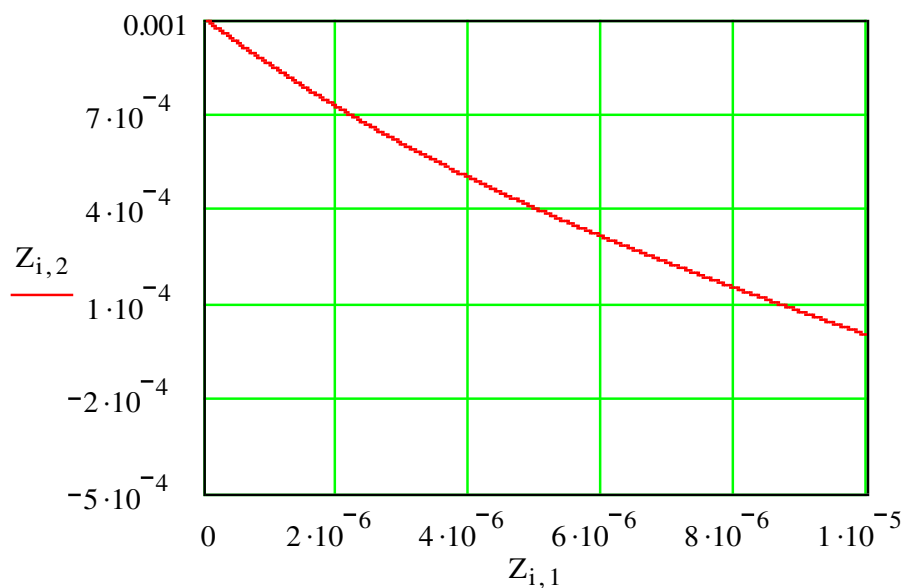


Рис. 6.2. Зміна концентрації розчиненого компонента по глибині плівки рідини (до прикладу 6.2)

Відстань $\frac{h}{2} = 0,5 \cdot 10^{-5}$ м, за $N = 50000$, що відповідатиме кроку $i = 25000$. На цьому кроці (рис. 6.3) концентрація розчиненого газу дорівнює $C_{A25000} = 3,997 \cdot 10^{-4}$ кмоль/м³, а значення $\frac{dC_A}{dx} = -92,488$.

	1	2	3
24995	$4.999 \cdot 10^{-6}$	$3.998 \cdot 10^{-4}$	-92.496
24996	$4.999 \cdot 10^{-6}$	$3.998 \cdot 10^{-4}$	-92.495
24997	$4.999 \cdot 10^{-6}$	$3.998 \cdot 10^{-4}$	-92.493
24998	$4.999 \cdot 10^{-6}$	$3.998 \cdot 10^{-4}$	-92.492
24999	$5 \cdot 10^{-6}$	$3.998 \cdot 10^{-4}$	-92.49
25000	$5 \cdot 10^{-6}$	$3.997 \cdot 10^{-4}$	-92.488
25001	$5 \cdot 10^{-6}$	$3.997 \cdot 10^{-4}$	-92.487
25002	$5 \cdot 10^{-6}$	$3.997 \cdot 10^{-4}$	-92.485
25003	$5 \cdot 10^{-6}$	$3.997 \cdot 10^{-4}$	-92.484
25004	$5.001 \cdot 10^{-6}$	$3.997 \cdot 10^{-4}$	-92.482
25005	$5.001 \cdot 10^{-6}$	$3.996 \cdot 10^{-4}$	-92.481
25006	$5.001 \cdot 10^{-6}$	$3.996 \cdot 10^{-4}$	-92.479
25007	$5.001 \cdot 10^{-6}$	$3.996 \cdot 10^{-4}$	-92.478
25008	$5.001 \cdot 10^{-6}$	$3.996 \cdot 10^{-4}$	-92.476
25009	$5.002 \cdot 10^{-6}$	$3.996 \cdot 10^{-4}$	-92.475
25010	$5.002 \cdot 10^{-6}$	$3.996 \cdot 10^{-4}$	-92.473

Рис. 6.3. Матриця розв'язку системи рівнянь

Питання для самоконтролю

1. Визначте сутність масопередачі.
2. Назвіть основні рівняння процесу масопередачі без хімічної взаємодії.
3. Охарактеризуйте рівняння конвективної дифузії.
4. Складіть математичний опис хімічних процесів у системі «газ — рідина».
5. Складіть математичний опис хімічних процесів у системі «рідина — рідина».
6. Складіть алгоритм розв'язання системи рівнянь у Mathcad 14.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яка умова дозволяє використовувати модель обмеженого осадження для опису вільного осадження?

- 1) об'ємна концентрація на початку процесу осадження дорівнює кінцевій
- 2) поправкова функція $\lambda(\varphi) = 0$
- 3) об'ємна концентрація частинок змінюється за лінійним законом
- 4) кінцева об'ємна концентрація частинок $\varphi_{до} > 0,2$
- 5) осадження частинок відбувається у ламінарному режимі

2. Коефіцієнт α окремої ділянки гідравлічної системи залежить від:

- 1) режиму руху рідини
- 2) шорсткості труб
- 3) довжини ділянки системи
- 4) швидкісного натиску в системі
- 5) різниці тиску на кінцях ділянки

3. Яке з рівнянь використовують для математичного опису руху рідини по трубопроводах?

- 1) $V_i = \frac{\sqrt{P_{i+1} - P_i}}{\alpha^2} \cdot \text{sign}(P_{i+1} - P_i)$
- 2) $V_i = \frac{\sqrt{P_{i+1} - (P_i + \rho \cdot g \cdot H)}}{\alpha} \cdot \text{sign}(P_{i+1} - (P_i + \rho \cdot g \cdot H))$
- 3) $P = P_0 + \rho \cdot g \cdot (H - h)$
- 4) $P_{i+1} - P_i = \lambda \cdot \frac{l}{d_i} \cdot \frac{w^2}{2 \cdot g} + \xi_i \cdot \frac{w^2}{2 \cdot g} + H$
- 5) $\Delta P_{шв} = \frac{\rho \cdot w^2}{2}$

4. Матеріальний баланс гідравлічної системи з живильною ємністю має загальний вигляд: $\frac{dV}{dt} = V_1(H) - V_2(H)$. Ємність наповнюватиметься, якщо:

- 1) діаметр вхідного трубопроводу більше діаметра труби на виході
- 2) тиск на вході в ємність менше, ніж на виході
- 3) на вхідній ділянці трубопроводу знаходиться менше місцевих опорів
- 4) лінійна швидкість руху потоку на вході більша, ніж на виході
- 5) об'ємна швидкість руху потоку на вході більша, ніж на виході

5. У якому вигляді необхідно записати в Mathcad 14 математичну модель для визначення залежності наповнення (спорожнення) бака рідиною від часу?

- 1) $V_1 - V_2 = \sqrt{\frac{P_1 - P_2}{\alpha^2}} \cdot \text{sign}(P_1 - P_2)$
- 2) $\frac{dV}{dt} = \sqrt{\frac{P_1 - P_2}{\alpha^2}} \cdot \text{sign}(P_1 - P_2)$

- 3) $F(V) := V1(V) - V2(V)$
- 4) $\begin{pmatrix} t_{i+1} \\ V_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t_i + h \\ V_i + F(X_i) \cdot h \end{pmatrix}$
- 5) $\begin{pmatrix} t_0 \\ V_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t_0 \\ V_0 \end{pmatrix}$
- 6) $F(V) := V1(V) - V2(V)$
- 7) $\begin{pmatrix} t_0 \\ H_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t_0 \\ H_0 \end{pmatrix}$
- 8) $\begin{pmatrix} t_{i+1} \\ H_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t_i + h \\ H_i + F(V_i) \cdot h \end{pmatrix}$
- 9) $t := \frac{\alpha \cdot V}{\sqrt{P_1 - P_2}} \cdot \text{sign}(P_1 - P_2)$

6. Математична модель обмеженого осадження частинки виглядає як:

- 1) квадратне алгебраїчне рівняння
- 2) лінійне диференціальне рівняння першого порядку
- 3) диференціальне рівняння другого порядку
- 4) диференціальне рівняння другого порядку в частинних похідних
- 5) диференціальне рівняння першого порядку в частинних похідних

7. Якими рівняннями можна описати процес вільного осадження кулястої частинки в ламінарному режимі?

- 1) $\frac{dw}{dt} = g \cdot \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{ч}}}\right) - \xi \cdot S \cdot \frac{\rho \cdot w^2}{2 \cdot m}$
- 2) $w = \frac{d^2 \cdot g \cdot (\rho_T - \rho)}{18 \cdot \mu}$
- 3) $w_{\text{oc}} = 5,46 \cdot \sqrt{\frac{d \cdot (\rho_T - \rho)}{\rho}}$
- 4) $m \cdot \frac{dw}{dt} = m \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{ч}}}\right) - \xi \cdot S \cdot \frac{\rho \cdot w^2}{2}$
- 5) $\frac{dw}{dt} = m \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{ч}}}\right) - \xi \cdot \frac{w^2}{2 \cdot \rho}$

8. Який запис обчислювального блоку Given-Find у Mathcad 14 правильний?

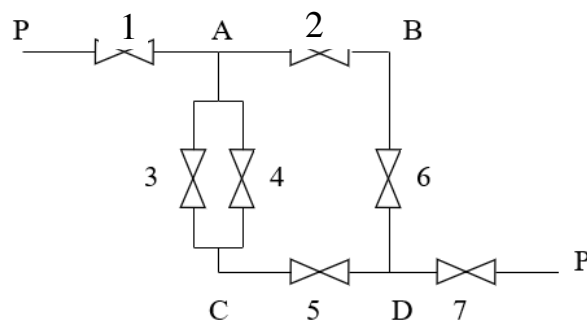
- 1) Given
 $y(x)=0$
 Find (x)
- 2) x:=0
 Given
 $y(x)=2$
 Find (x)
- 3) x:=2
 Given
 Find (x)

- 4) Given
 $y(x)=2$
 Find (y)
- 5) Given
 $x:=2$
 $y(x)=2$
 Find (x)

9. Вкажіть правильний запис даних у Mathcad 14 для побудови графіка $y = f(y)$:

- 1) $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad i:=0.2$
- 2) $x_i := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad y_i := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad i:=0.3$
- 3) $x_i := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad y_i := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad i:=1.3$
- 4) $x := \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad i:=1.3$
- 5) $x_i := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad y_i := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad i:=0.2$

10. Яка модель відповідає умові визначення тиску в точці B відповідно до наведеної схеми?



- 1) $P1 - PB = \alpha 12V2^2$
 $PB - PD = \alpha 6V6^2$
 $PA - PC = \alpha 34V34^2$
 $PC - P2 = \alpha 57V7^2$
 $V34 = V3 + V4$
 $V1 = V7$
 $V2 = V6$
- 2) $P1 - PA = \alpha 1V2^2$
 $PA - PD = \alpha 345V5^2$
 $PA - PB = \alpha 2V2^2$
 $PB - PD = \alpha 6V6^2$
 $PD - P2 = \alpha 7V7^2$
 $V1 = V7$
 $V2 = V6$
 $V7 = V5 + V6$
- 3) $P1 - PA = \alpha 1V1^2$
 $PA - PB = \alpha 2V2^2$
 $PB - PD = \alpha 6V6^2$
 $PA - PC = \alpha 3V3^2$
 $PA - PC = \alpha 4V4^2$
 $PC - PD = \alpha 5V5^2$
 $PD - P2 = \alpha 7V7^2$
 $V1 = V2 + V5$
 $V7 = V5 + V6$
 $V6 = V2$
 $V1 = V7$
 $V1 = V5 + V6$
- 4) $P1 - PA = \alpha 1V1^2$
 $PA - PC = \alpha 34V34^2$
 $PC - PD = \alpha 5V5^2$
 $PA - PD = \alpha 6V26^2$
 $PD - P2 = \alpha 7V7^2$
 $V1 = V26 + V34$
 $V34 = V5$
- 5) $P1 - PA = \alpha 1V1^2$
 $PA - PD = \alpha 23456V23456^2$
 $PD - P2 = 27V7^2$
 $V1 = V23456$
 $V1 = V7$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гладка, О. М. Практикум з інформатики. Використання табличного процесора Excel : навч. посіб. / О. М. Гладка. — Рівне : НУВГП, 2011. — 75 с.
2. Карімов, І. К. Комп'ютерні методи та засоби розв'язання інженерних задач : навч. посіб. / І. К. Карімов. — Кам'янське : ДДТУ, 2017. — 283 с.
3. Коробов, В. І. Хімічні розрахунки в середовищі Mathcad : навч. посіб. / В. І. Коробов, В. Ф. Очков. — Донецьк : Вид-во ДНУ, 2012. — 216 с.
4. Кравченко, І. В. Інформаційні технології: Системи комп'ютерної математики / І. В. Кравченко, В. І. Микитенко. — Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. — 243 с.
5. Кузьмичов, А. І. Оптимізаційні методи і моделі. Моделювання засобами MS Excel : навч. посіб. / А. І. Кузьмичов. — Київ : Ліра-К, 2015. — 215 с.
6. Кутова, О. В. Загальна хімічна технологія. Приклади вирішення задач з використанням Mathcad та MS Excel : навч. посіб. для студ. закл. вищ. освіти / О. В. Кутова, Р. В. Сагайдак-Нікітюк, І. В. Ковалевська ; за ред. к. т. н. доц. О. В. Кутової. — Харків : НФаУ : Золоті сторінки, 2019. — 128 с.
7. Кутова, О. В. Математичне моделювання біотехнологічних процесів. Розв'язання завдань з використанням електронних таблиць Microsoft Excel : метод. рек. до самост. роб. / О. В. Кутова, Р. В. Сагайдак-Нікітюк, К. С. Юр'єва. — Харків : НФаУ, 2018. — 34 с.
8. Кутова, О. В. Процеси та апарати хіміко-фармацевтичних виробництв : курс лекцій : навч. посіб. / О. В. Кутова [та ін.]. — Харків : НФаУ, 2023 — 172 с.
9. Методи рішення математичних задач у середовищі Mathcad : навч. посіб. з дисципліни «Інформатика і системологія» / укл.: О. В. Соболенко [та ін.]. — Дніпро : НМетАУ, 2020. — 60 с.
10. Методи та засоби комп'ютерних обчислень : електрон. навч. посіб. / Є. М. Крижановський [та ін.]. — Вінниця : ВНТУ, 2016. — 90 с.
11. Нелюбов, В. О. Основи інформатики. Microsoft PowerPoint 2016 : навч. посіб. / В. О. Нелюбов, О. С. Куруца. — Ужгород : ДВНЗ «УжНУ», 2018. — 122 с.
12. Процеси та апарати хіміко-фармацевтичних виробництв у таблицях та номограмах : навч. посіб. / Р. В. Сагайдак-Нікітюк [та ін.] ; за ред. к. т. н. В. І. Вельми. — Харків : НФаУ, 2019. — 70 с.
13. Чисельні методи розв'язання інженерних задач в пакеті Mathcad. Курс лекцій та індивідуальні завдання : навч. посіб. з дисципліни «Інформатика» для студ. вищ. навч. закл. / Л. В. Васильєва [та ін.] — Краматорськ : ДДМА, 2006. — 108 с.
14. Excel 2013–2016 : навч. посіб. / укл.: С. Ф. Дячук. — Тернопіль : Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя, 2021. — 308 с.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
1. Основні поняття математичного моделювання	4
Питання для самоконтролю	7
2. Моделювання гідродинамічної системи у стаціонарному режимі	8
2.1. Основні теоретичні відомості	8
2.2. Математична модель розгалуженої гідравлічної системи	10
2.3. Методи розв'язання системи нелінійних рівнянь алгебри	14
2.4. Розв'язання системи нелінійних рівнянь засобами Mathcad 14	17
2.5. Приклади розв'язування завдань	18
Питання для самоконтролю	36
3. Математичне моделювання гідравлічної системи з живильною ємністю	38
3.1. Складання математичного опису живильного резервуара	38
3.2. Розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку числовими методами	40
3.3. Приклади розв'язування завдань	41
Питання для самоконтролю	48
4. Математичне моделювання осадження частинок	49
4.1. Складання математичної моделі вільного осадження частинок	49
4.2. Приклади розв'язування завдань	52
4.3. Складання математичної моделі стисненого осадження частинок	59
4.4. Приклади розв'язування завдань	63
Питання для самоконтролю	69
5. Моделювання процесів теплопередачі	70
5.1. Складання математичної моделі передачі тепла по довжині стрижня в усталеному режимі	71
5.2. Математична модель стаціонарного розподілу температури у поперечному перерізі	76
5.3. Приклади розв'язування завдань	77
Питання для самоконтролю	93
6. Моделювання процесів масопередачі	94
6.1. Масопередача без хімічної взаємодії	94
6.2. Складання і аналіз математичного опису хімічних процесів у системі «газ — рідина» (рідина — рідина)	95
6.3. Приклади розв'язування завдань	96
Питання для самоконтролю	101
ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ	102
СПИСОК ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ	106

Самостійне електронне навчальне видання

Кутова Ольга В'ячеславівна
Сагайдак-Нікітюк Ріта Василівна
Кухтенко Олександр Сергійович
Ковалевська Інна В'ячеславівна

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ
ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МАТНСАД 14
ТА MS EXCEL**

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

За редакцією доцентки О. В. Кутової

Редакторка *Н. І. Голубєва*
Комп'ютерне верстання *О. М. Білинської*

Формат 60 × 90/8. Ум. друк. арк. 13,5.

Національний фармацевтичний університет
вул. Пушкінська, 53, м. Харків, 61002
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серії ДК № 3420 від 11.03.2009.